LES EXERCISES POUR L'EXAMEN FINAL

N'utilisez pas vos livres. Vous pouvez avoir une feuille des notes.
Si vous avez le temp, verifiez vos reponses.

(1) Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui, calculer leur inverse.

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{pas inversible}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & -5/6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -4 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & -1 & -1/2 \\ -11 & 3 & 2 \\ -5/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(2) Calculer le déterminant des matrices suivantes:

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$$

$$\text{dét}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{dét}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\text{dét}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{bmatrix} = x_2{x_3}^2 - x_3{x_2}^2 - x_1{x_3}^2 + x_1{x_2}^2 + {x_1}^2x_3 - {x_1}^2x_2$$

$$\text{dét}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix} = 12$$

(3) Pour la matrice suivante, donner la décomposition triangulaire de la forme LU où L est triangulaire inférieur unitaire et U est triangulaire supérieure.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(4) Trouver le polynôme minimal de la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C^0}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{C^1}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}} \qquad \underset{C^1 - I}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{C^2}{\begin{bmatrix} 6 & 12 & -15 \\ 9 & 19 & -23 \\ 0 & 18 & -3 \end{bmatrix}} \qquad \underset{C^2 - 6I}{\begin{bmatrix} 0 & 12 & -15 \\ 9 & 13 & -23 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix}} \qquad \underset{C^2 - 6I - 4(C-I)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & -11 \\ 4 & 6 & -13 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{C^3}{\begin{bmatrix} 33 & 33 & -78 \\ 51 & 53 & -121 \\ 21 & 81 & -60 \end{bmatrix}} \qquad \underset{C^3 - 33I}{\begin{bmatrix} 0 & 33 & -78 \\ 51 & 20 & -121 \\ 21 & 81 & -93 \end{bmatrix}} \qquad \underset{C^3 - 33I - 11(C-I)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -56 \\ 40 & -24 & -88 \\ 32 & 48 & -104 \end{bmatrix}}$$

polynôme minimal $= C^3 - 33I - 11(C-I) - 8(C^2 - 6I - 4(C-I)) = C^3 - 8C^2 + 21C + 6I$

(5) Donner les solutions du système d'équations

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_1 + x_2 + x_4 - x_6 = 3, x_3 - 2x_4 + 4x_6 = -1, x_5 - 3x_6 = 3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(6) Trouver les solutions des systèmes d'équations linéaires ou montrer que ils sont contradictoires.

(a)

$$x_1 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

(b)

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$$

$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

pas de solutions

(c)

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6$$
$$-4x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 - 3x_2, x_3 = 2 + 4x_2$$

(7) Si $[u] = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $[v_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[v_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[v_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Trouver ${}_{\mathcal{B}}[u]$ ou $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

${}_{\mathcal{B}}[u] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ parce ce que $2[v_1] + [v_2] - 2[v_3] = [u]$.

(8) Pour la même base $\mathcal{B}$, ${}_{\mathcal{B}}[w] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculer $[w]$.

$[w] = [v_1] + [v_2] + [v_3] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(9) Trouver un vecteur géométrique qui est othogonal aux vecteurs $u_1 = 3e_1 - e_3$ et $u_2 = e_1 - 2e_2$. Donner équation d'un plan qui contient les pointes $(3, 0, -1)$ et $(1, -2, 0)$ et $(0, 0, 0)$ (de la forme paramétrique et de la forme $ax + by + cz = d$).

$u_1 \times u_2 = -2e_1 - e_2 - 6e_3$, on a toujours $u_1 \cdot (u_1 \times u_2) = 0$ et $u_2 \cdot (u_1 \times u_2) = 0$ donc $u_1 \times u_2$ est orthogonal à u_1 et u_2.

Un équation du plan est $-2x - y - 6z = 0$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(10) Est-ce que les vecteurs $w_1 = -3e_2 + 3e_3$, $w_2 = e_1 + 2e_2$, $w_3 = 3e_1 + e_2 + 5e_3$ sont linéairement dépendants ou indépendant? Si ils sont linéairement dependent, trouver une combinaison linéaire qui est nulle.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow w_1, w_2, w_3$ sont linéairement dépendants et $5w_1 + 9w_2 - 3w_3 = 0$.

(11) Est-ce que les vecteurs $w_1 = e_1 + 2e_3$, $w_2 = e_1 + e_2$, $w_3 = e_1 + e_2 - e_3$ sont linéairement dépendants ou indépendant? Si ils sont linéairement dependent, trouver une combinaison linéaire qui est nulle.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow w_1, w_2, w_3$ sont linéairement indépendant.