

PETIT TEST # 3 - MATH 2650 - 15 OCTOBRE, 2003

VOUS POUVEZ UTILISER VOS LIVRES.

(1) (15 points) Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_{13}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_{23}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérifier:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) (15 points) Déterminer le polynôme minimal de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \\ I & & \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ B & B - I & \\ \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B^2 & B^2 - I & B^2 - I - 3(B - I) \end{array}$$

Le polyôme minimal de B est

$$B^2 - I - 3(B - I) = B^2 - 3B + 2I$$

Confirmation:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$