CONF. BORDEAUX DEC 2016

ANTIPODE ET HYPERGRAPH
(AVEC C. BENEDETTI

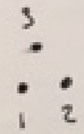
GRAPHES

- K ENSEMBLE FINI
  (TYPIQUEMENT $\{1,2,\dots,n\}$ MAIS PAS TOUJOURS)

- G[K] GRAPHES SIMPLES SUR K

$$\{ g \subseteq \{ E \subseteq K : |E| = 2 \}$$

POUR K FIXE, JE REPRESENTE g PAR SON ENSEMBLE D'ARRÊTES

g =  $g = \phi \in G[\{1,2,3\}]$

g =  $g = \{\{1,3\}\} \in G[\{1,2,3\}]$

OPERATIONS SUR LES GRAPHS

POUR $\boxed{I \uplus J = K}$ || PAS DEFINIE SINON

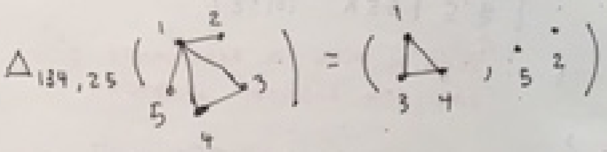
$I \cup J = K$
$I \cap J = \phi$

$$\mu_{I,J} : G[I] \times G[J] \longrightarrow G[K]$$
$$(g,h) \longmapsto g \cup h$$

$$\Delta_{I,J} : G[K] \longrightarrow G[I] \times G[J]$$
$$g \longmapsto (g|_I , g|_J)$$

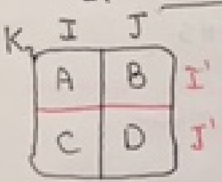
ici $g|_I = \{ e \in g \mid \underset{(*)}{e \subseteq I} \}$

EXEMPLES :



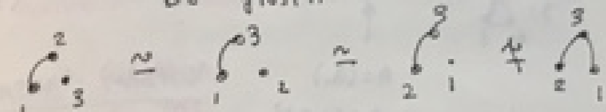
• μ et Δ sont (co) associatives
ont une (co) unité

et sont compatible



$$\Delta_{I',J'} \circ m_{I,J} = (m \times m)_{AB,\, CD} (I_A \times \tau_{BC} \times I_D)(\Delta_{A,C} \times \Delta_{B,D})$$

$Q G[K]_{S_K}$ ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR LES CLASSES D'ÉQUIVALENCE DE GRAPH



INVARIANTS COMBINATOIRES

[DU GENRE "POLYNOME CHROMATIQUE"]

POUR TOUTE FAMILLES DE FONCTIONS "MULTIPLICATIVES"

$$\forall K \quad \xi_K : G[K] \longrightarrow \mathbb{Q}$$

MULTIPLICATIVES :
$$\xi_K(g \cup h) = \xi_I(g)\, \xi_J(h)$$
$\in G[I] \times G[J]$

EXEMPLE

$$\xi_K(g) = \begin{cases} 1 & g = \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\chi^{\xi}_g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{A = (A_1, \dots, A_\ell) \vDash K} \xi_{A_1}(g|_{A_1}) \cdots \xi_{A_\ell}(g|_{A_\ell}) \binom{t}{\ell}$$

POUR L'EXEMPLE

$\chi^{\xi}_g(t)$ EST LE POLYNOME CHROMATIQUE CLASSIQUE

(*) - SI ON CHANGE ξ ON OBTIENT DES TRUCS DIFF.
- EN GENERAL ON VA VERS LES FONCTIONS SYM.

EXAMPLE pour ξ classique

$$\chi^{\xi}_{g: \triangle}(t) = 0\binom{t}{1} + 1\binom{t}{2} + 6\binom{t}{3}$$

$A = (A_1)$ $\quad A_1 = \{1\,2\,3\}$

$A = (A_1, A_2)$ seul $A_1 = \{1,3\}$ $A_2 = \{2\}$

$g|_{A_1} = g \quad \xi(g) = 0$

nous donne $\chi(g|_{A_1}) \cdot \chi(g|_{A_2}) = 1$

[Stanley] $\chi^{\xi}_g(-1) = ?$

classique

$\left[\ \chi^{\xi}_g(-1) \underset{[\text{Stanley}]}{=} \pm \#\ \text{orientations acycliques}\ \right]$

Antipode

$$\boxed{\begin{aligned} S : \mathbb{Q}G[K]_{\mathfrak{S}_K} &\longrightarrow \mathbb{Q}G[K]_{\mathfrak{S}_K} \\ g &\longmapsto \sum_{A \models K} (-1)^{\ell(A)} \mu_A \circ \Delta_A(g) \end{aligned}}$$

ceci est bien défini étant donné μ, Δ avec les bonnes propriétés.

- très utile de connaître S pour des formules d'inversion (Lagrange, Möbius, ...)
- mais aussi pour la question de Stanley car

$$\boxed{\chi^{\xi}_g(-1) = \xi \circ S(g)}$$

on peut voir cela directement des déf.

la définition de S est "longue" avec plusieur ~~cancelation~~ annulations, on veut de meilleur formule

Humbert-Martin

$\text{Flat}(g) = \{ g|_{A_1} \cdot g|_{A_2} \cdots g|_{A_\ell} : A \models K \}$

peut être calculer plus efficacement (sous graphes fermés)

THM

$$\boxed{S(g) = \sum_{h \in \text{Flat}(g)} (-1)^{c(h)}\, a(g/h)\ h}$$

\# orientation acyclique

\# comp. connexes = sommet de g/h

g contracté par h

Aguiar-Ardila

Zonotope graphique :

$K = \{1, 2, \dots, n\}$

$E \subseteq K \quad |E| = 2 \to \Delta_E$ segment $\quad E = \{i, j\}$

e_i —— e_j

Somme de Minkowski

$$\boxed{\Delta_g = \sum_{E \in g} \Delta_E}$$ est un polytope

THM les faces de Δ_g sont naturellement étiqueté par les orientations acycliques de g/h pour les $h \in \text{Flat}(G)$ de plus

$S(g) = \sum (-1)^{c(F)} h(F)$

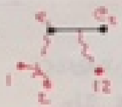
EXAMPLE: $g =$ 

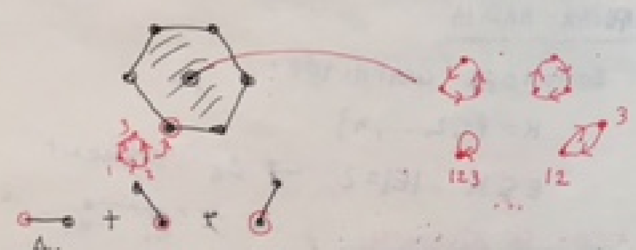
$\Delta_g = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{23}$

$\Delta_{12} + \Delta_{13} =$ 

$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{23} =$ 

6 sommets
6 arrêtes
1 face interieur

$\Delta_{12} \rightsquigarrow$ 



- on choisie une façon d'obtenir le point
- contracte les cycles

FAIT

- c'est bien défini
- on obtient le meme résultat à l'interieur d'une même face

HYPERGRAPHES

$HG[K]$ hypergraphes sur K

$\{h \subseteq \{E \subseteq K : |E| \geq 2\}\}$

$\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{2,3,4\}\}$

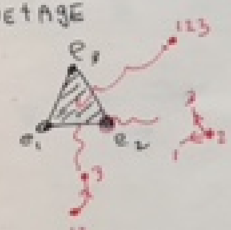
THEOREM [BENEDETTI - BERGERON]

$\Delta_E =$ simplexe defini par $\{e_i : i \in E\}$

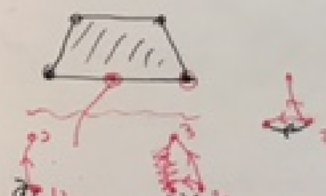
$$\boxed{\Delta_h = \sum_{E \in h} \Delta_E}$$

nestohèdre graphique

Bon etiquetage

$\Delta_{123} \rightsquigarrow$ 

$\Delta_{123} + \Delta_{12}$ 



BIEN DEFINI!

$$g(h) = \sum (-1)^{\#\text{SOMMET } h/F} \; F$$

F: FACE DE Δ_h

$h =$ 

$\Delta_h =$ 

DEUX CERIES ÉS

- ~~two CIRCLE~~ TRIANGUL~~ÉES~~

- HOMOLOGIE $\equiv 0$

$s(h) = - - \cdot \quad (0) \quad : \cdot \cdot$