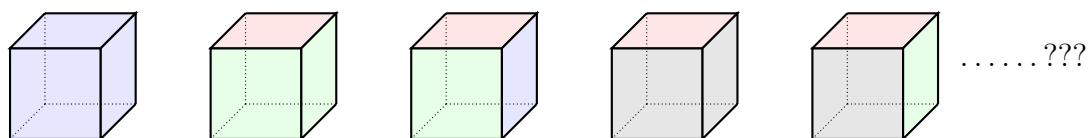


# GRUPOS Y ENUMERACIONES

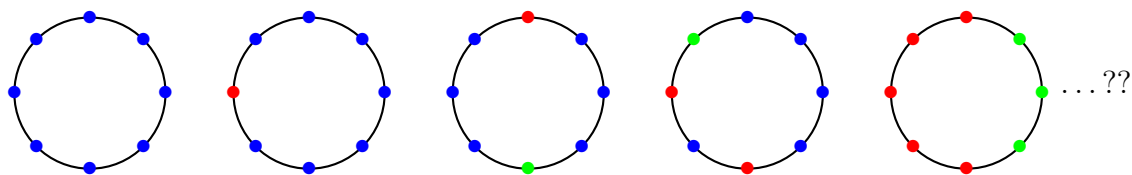
NANTEL BERGERON

## 1. INTRODUCCIÓN RÁPIDA

En este mini curso veremos cómo contar varios atributos relacionados con las simetrías de un objeto. Por ejemplo, ¿cuántos dados diferentes con cuatro colores podemos construir?



Hay muchas posibilidades y es difícil responder sin las herramientas que vamos a construir. Otro ejemplo típico ¿Cuántos collares diferentes podemos construir usando 3 tipos de perlas?

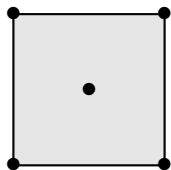


Para lograr esto necesitamos aprender sobre grupos de simetrías, acciones de grupos, coconjuntos, etc. Veremos enumeraciones y aplicaciones mucho más interesantes.

## 2. SIMETRÍAS Y GRUPOS

Nos interesa entender todas las simetrías de un objeto que estudiamos y las estructuras algebraicas sobre esas simetrías.

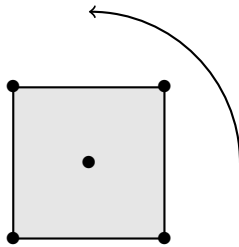
2.1. **Conjuntos de Simetrías.** Suponga que tiene un cuadrado sólido adjunta en el medio:



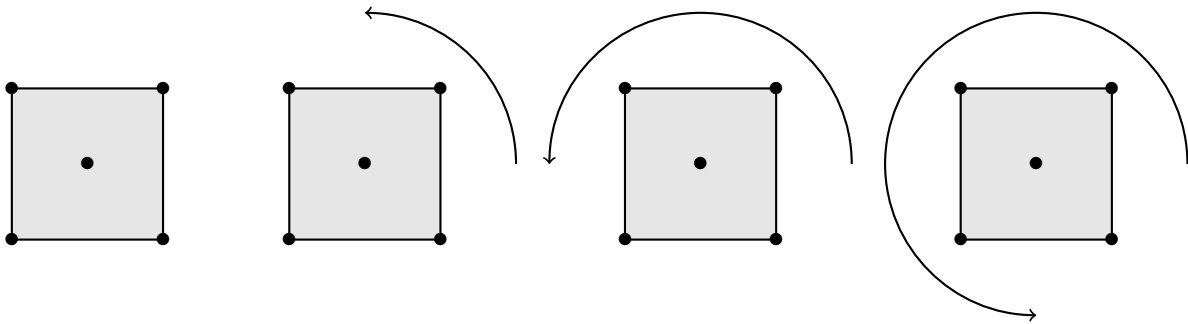
---

Research of Bergeron supported in part by NSERC and York Research Chair.

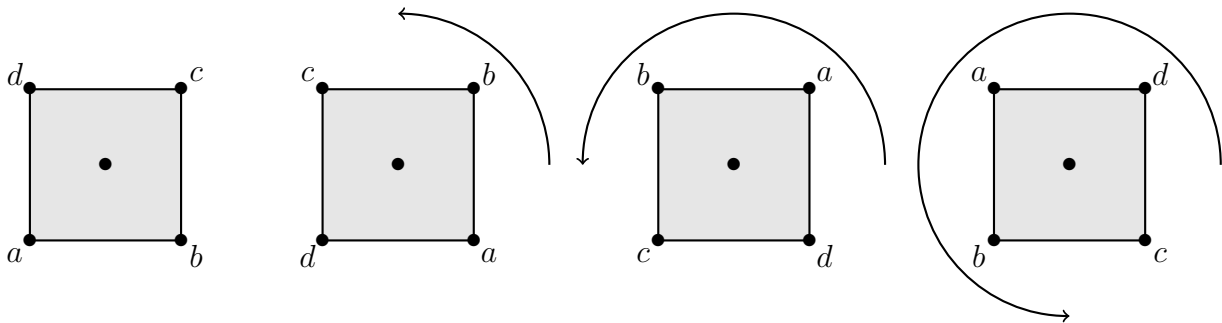
Podemos dar vuelta el cuadrado y recuperar el mismo. Esto es una simetría.



Queremos listar todas las posibilidades:



¿Hay más? ¿Cuándo creen que dos simetrías son las mismas? Para hacer un seguimiento, podemos nombrar los vértices del cuadrado para ver qué les sucede. Esta es una marca secreta y no es parte del objeto, es sólo allí para ayudarnos a realizar un seguimiento de lo que sucede:

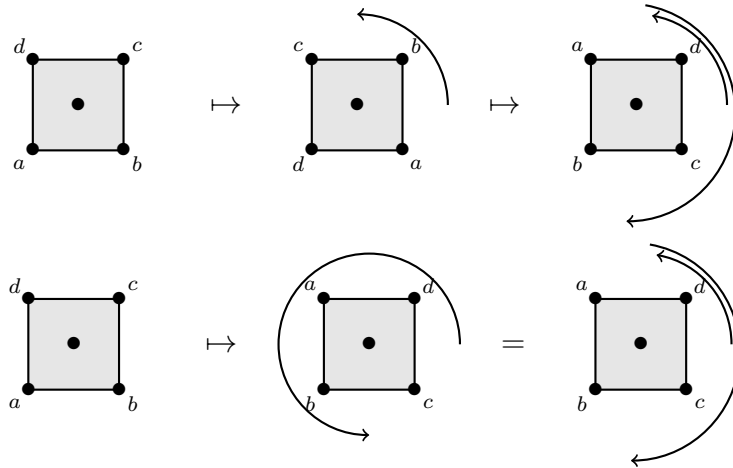


Entonces podemos codificar lo que sucede al cuadrado, enumerando solamente lo que sucede a  $a, b, c$ , y  $d$ :

$$\sigma_0 = \begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}, \quad \sigma_1 = \begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}, \quad \sigma_2 = \begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}, \quad \sigma_3 = \begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}.$$

Este es un modelo matemático de las simetrías del cuadrado. Ahora decimos que dos simetrías son **iguales** si cuando comienzan con la misma marca, terminan con la misma marca después

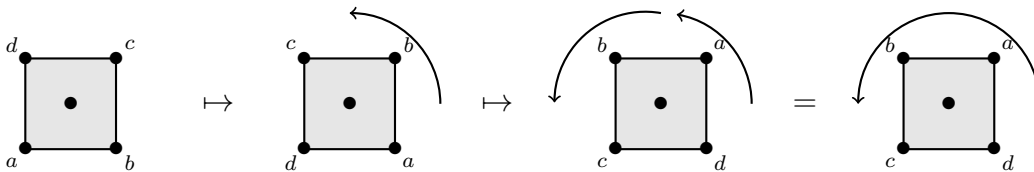
de la simetría.



Este modelo es útil para comprender las estructuras de esas simetrías y centrarse en lo que nos interesa en este momento (los vértices en la esquina del cuadrado). Esto describe de alguna manera todas las simetrías del cuadrado. Pienso en ellos como funciones. Esto no es único, consideraremos pronto otras descripciones de las **mismas simetrías** y veremos que pueden tener diferentes presentaciones.

**2.2. Operaciones sobre simetrías.** Ahora queremos describir la operación que podemos hacer sobre las simetrías. Primero,

**Componiendo simetrías:** ¿Qué pasa si hago una rotación, y luego otra?



Ahora usando nuestro modelo matemático:

$$\begin{array}{cccc}
 a & b & c & d \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 d & a & b & c \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 c & d & a & b
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 abcd \\
 cdab
 \end{array}
 .$$

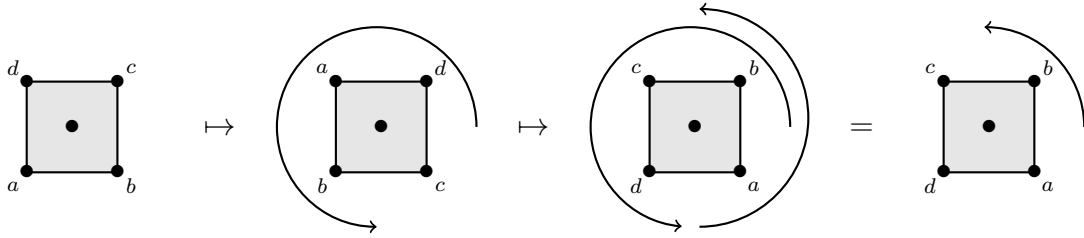
Es decir, composición de funciones:

$$\begin{array}{l}
 \sigma_1: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\} \\
 a \mapsto d \\
 b \mapsto a \\
 c \mapsto b \\
 d \mapsto c
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \sigma_2: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\} \\
 a \mapsto c \\
 b \mapsto d \\
 c \mapsto a \\
 d \mapsto b
 \end{array}$$

Lo que vimos anteriormente es que

$$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2$$

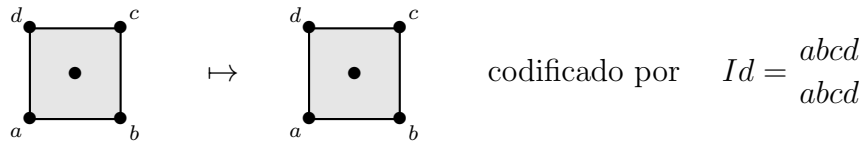
Son los mismos funciones (de ahí la misma simetría). Otro ejemplo



En todo caso la composición de rotaciones nos da otra rotación. Ahora, usando nuestro modelo matemático podemos ver todos los casos

	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>
	<i>abcd</i>	<i>dabc</i>	<i>cdab</i>	<i>bcda</i>
<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>
<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>dabc</i>	<i>cdab</i>	<i>bcda</i>
<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>
<i>dabc</i>	<i>dabc</i>	<i>cdab</i>	<i>bcda</i>	<i>abcd</i>
<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>
<i>cdab</i>	<i>cdab</i>	<i>bcda</i>	<i>abcd</i>	<i>dabc</i>
<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>	<i>abcd</i>
<i>bcda</i>	<i>bcda</i>	<i>abcd</i>	<i>dabc</i>	<i>cdab</i>

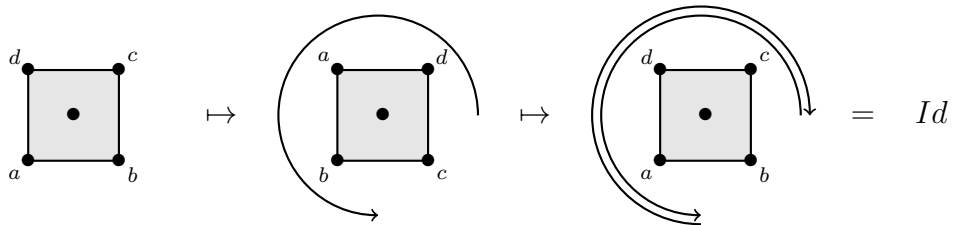
**La simetría identidad:** Observaste que hay una simetría especial que “no hace nada”:



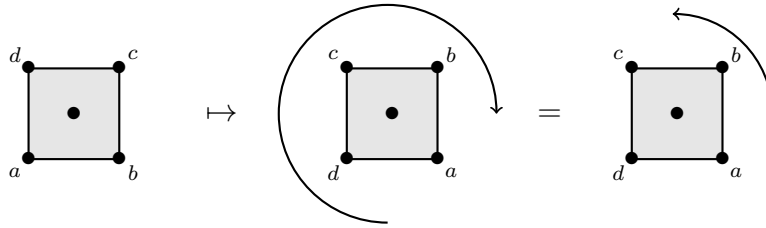
Esta simetría es especial en el sentido de que si componemos por  $Id$  a la derecha o a la izquierda no cambiamos nada:

$$Id \circ \sigma = \sigma \circ Id = \sigma$$

**Invertir simetrías:** Finalmente, usted ve que cualquier simetría se puede deshacer:



Aquí tenemos que



Decimos que es la **inversa**. Si  $\sigma$  es una simetría, denotamos su inversa por  $\sigma^{-1}$ . Usando la notación como arriba, tenemos

$$\sigma_0^{-1} = Id = \sigma_0 \quad \sigma_1^{-1} = \sigma_3 \quad \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \quad \sigma_3^{-1} = \sigma_1$$

**2.3. Grupos abstractos.** Cuando hablamos de las simetrías de un objeto hemos visto cuatro características importantes

- (1) Tenemos un **conjunto** de simetrías
- (2) Podemos **componer** simetrías y devolver una simetría en nuestro conjunto
- (3) Tenemos una simetría especial llamada **identidad**
- (4) Cada simetría tiene una **inversa**

En términos matemáticos, tenemos un **grupo**. Más formalmente, un grupo es:

- (1) Un **conjunto**  $G$
- (2) Una **operación asociativa**  $m: G \times G \rightarrow G$   
[escribimos a menudo  $m(a, b) = ab$  o  $m(a, b) = a + b$ ]

$$\text{Asociativa: } a(bc) = (ab)c$$

- (3) Un **elemento único**  $1 \in G$ : Tal que, para todos  $g \in G$

$$1g = g1 = g$$

- (4) Cada  $g \in G$  tiene una **inversa**  $g^{-1}$ :

$$gg^{-1} = g^{-1}g = 1$$

**Ejemplo 1.**  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  donde asumimos  $a^4 = 1$  entonces

$m$	1	$a$	$a^2$	$a^3$
1	1	$a$	$a^2$	$a^3$
$a$	$a$	$a^2$	$a^3$	1
$a^2$	$a^2$	$a^3$	1	$a$
$a^3$	$a^3$	1	$a$	$a^2$

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a^3, \quad a^{-2} = a^2, \quad a^{-3} = a.$$

**Ejemplo 2.**  $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$  donde asumimos  $a^2 = 1$ ,  $b^2 = 1$  y  $ab = ba$  entonces

$m$	1	$a$	$b$	$ab$
1	1	$a$	$b$	$ab$
$a$	$a$	1	$ab$	$b$
$b$	$b$	$ab$	1	$a$
$ab$	$ab$	$b$	$a$	1

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad (ab)^{-1} = ab.$$

**Ejemplo 3.**  $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$  donde asumimos  $s^2 = 1$ ,  $t^2 = 1$  y  $sts = tst$  (¿Lo tenemos todo?), entonces

$m$	1	$s$	$t$	$st$	$ts$	$sts$
1	1	$s$	$t$	$st$	$ts$	$sts$
$s$	$s$	1	$st$	$t$	$sts$	$ts$
$t$	$t$	$ts$	1	$tst$	$s$	$st$
$st$	$st$	$sts$	$s$	$ts$	1	$t$
$ts$	$ts$	$t$	$sts$	1	$st$	$s$
$sts$	$sts$	$st$	$ts$	$s$	$t$	1

Es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad (ab)^{-1} = ab.$$

**2.4. Grupo simétrico.** Hemos visto anteriormente que las simetrías de un objeto pueden ser codificadas por algunas biyecciones de un conjunto finito (permutaciones). Esto trae dos preguntas

- (1) ¿Es posible realizar cualquier grupo (abstracto) con un grupo de biyecciones? Equivalentemente, ¿es cierto que los grupos abstractos son las simetrías de algo?
- (2) ¿Es el conjunto de todas las biyecciones de un conjunto finito un grupo?

Primero respondamos a la segunda pregunta. Sea  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  y considere el conjunto

$$S_n = \{\sigma \mid \sigma: [n] \rightarrow [n] \text{ Biyección}\}$$

Decimos que el elemento de  $S_n$  son **permutaciones**. Por ejemplo

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

donde codificamos las permutaciones por su lista de valores. Que está usando el orden natural  $1 < 2 < \dots < n$ , enumeramos los valores  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ . Por ejemplo, la permutación 231 es la biyección

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} &\rightarrow \{1, 2, 3\} \\ 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Tenemos la permutación **identidad**  $Id = 123 \cdots n \in S_n$ , y dadas dos permutaciones  $\sigma, \pi \in S_n$  podemos componer las dos funciones y obtenemos una permutación  $\sigma \circ \pi \in S_n$ . Además, para cada permutación  $\sigma \in S_n$  podemos encontrar  $\sigma^{-1}$  tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id.$$

Esto nos da un grupo interesante y lo llamamos **el grupo simétrico**.

**2.5. Representación de permutaciones.** Consideremos ahora la pregunta de considerar un grupo abstracto como un grupo de simetrías. Mira Ejemplo 1. Puede comprobar que el conjunto de la funciones

$$1 \mapsto 1234; \quad a \mapsto 2341; \quad a^2 \mapsto 3412; \quad a^3 \mapsto 4123$$

es una realización del grupo  $C_4$ . Ahora compare esto con nuestro ejemplo inicial de rotación del cuadrado y vea que hasta cambiar los nombres, tenemos el mismo grupo de simetrías. El grupo abstracto  $C_4$  se realiza usando permutaciones (un subconjunto de  $S_4$ ):

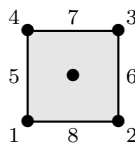
$$\{1234, 2341, 3412, 4123\} \subset S_4.$$

Necesitamos hacer algunas observaciones. Cuando tenemos  $\{Id\} \subseteq H \subseteq S_n$  y  $H$  es un grupo por sí mismo decimos que  $H$  es un **subgrupo de permutaciones** de  $S_n$ . Para un grupo  $G$ , si tenemos una función  $\varphi: G \rightarrow S_n$  tal que  $\varphi(1) = Id$  y  $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ , entonces decimos que  $\varphi$  es un **homomorfismo** de  $G$ . Puede comprobar que en este caso  $\{Id\} \subseteq \varphi(G) \subseteq S_n$  es entonces un subgrupo de permutación de  $S_n$  y decimos que  $\varphi(G)$  es una **representación de permutaciones** de  $G$ . Más aún, si  $|G| = |\varphi(G)|$  entonces decimos que  $\varphi(G)$  es una **realización de permutaciones** de  $G$ .

### Ejercicios A.

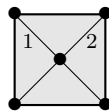
Ej.2.1 Para  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  donde asumimos  $a^4 = 1$ , encuentre un homomorfismo  $\varphi: C_4 \rightarrow S_5$ . Encuentre 5 puntos sobre el cuadrado que sean enviados a sí mismos después de rotar y visualícelos usando el mapa  $\varphi$ .

Ej.2.2 Ponga números en los vértices y los lados del cuadrado



y use esto para definir un homomorfismo  $\phi: C_4 \rightarrow S_8$ . Ahora usted ve que el mismo grupo puede tener muchas realizaciones de permutaciones diferentes.

Ej.2.3 Dibuje las dos diagonales del cuadrado y llámelas 1 y 2:



Use esto para definir un homomorfismo  $\phi: C_4 \rightarrow S_2$ . Esto es una representación de permutaciones pero ¿es una realización de permutaciones? ¿Por qué?

- Ej.2.4 Considere el grupo  $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$  donde asumimos  $a^2 = 1$ ,  $b^2 = 1$  y  $ab = ba$ . Encuentre una manera de verlo como la simetría de un objeto. Utilice esto para dar un homomorfismo  $\varphi: C_2 \times C_2 \rightarrow S_4$  y dar una realización de permutaciones de este grupo.
- Ej.2.5 Muestra que  $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$  donde asumimos  $s^2 = 1$ ,  $t^2 = 1$  y  $sts = tst$ , es lo mismo que  $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ . Encontrar un isomorfismo  $\varphi: \mathbb{S}_3 \rightarrow S_3$ . ¿Cuáles son las permutaciones  $\varphi(s)$  y  $\varphi(t)$ ? ¿Puedes encontrar un objeto geométrico tal que  $S_3$  describa las simetrías de ese objeto?
- Ej.2.6 ¿Cuál es la cardinalidad de  $S_n$ ? Esa es la cantidad de permutaciones de  $[n]$  que hay.
- Ej.2.7 Tome un objeto geométrico o politopo en  $\mathbb{R}^3$  (prisma, cubo, tetraedro, ...). Describa su simetría. Luego, ponga la etiqueta en su objeto para obtener una realización de permutaciones de ese grupo de simetrías.

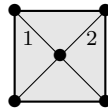
### 3. ACCIONES DE GRUPOS Y ENUMERACIONES

En los ejercicios de la Sección 2, hemos visto que para obtener una realización de permutaciones de un grupo, consideramos un objeto para visualizar las simetrías y luego nombrar algunas porciones del objeto para obtener la permutación. Ahora voy a discutir cómo hacerlo sistemáticamente.

**3.1. Acciones.** Una **acción** de un grupo  $G$  en un conjunto finito  $X$  es un mapa  $G \times X \rightarrow X$  tal que

- $1.x=x$
- $(gh).x=g.(h.x)$

Observemos que la notación aquí pone énfasis en el hecho de que  $G$  hace algo al elemento de  $X$ . Mire el ejercicio Ej.2.3 donde usamos  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  como las simetrías del cuadrado



Esto nos da una acción de  $C_2$  en  $X = \{1, 2\}$ .

$$\begin{array}{lll} a.1 = 2 & a^2.1 = 1 & a^3.1 = 2 \\ a.2 = 1 & a^2.2 = 2 & a^3.2 = 1 \end{array}$$

Vemos que para un  $g \in G$  fijo, la función  $X \rightarrow X$  dado por  $x \mapsto g.x$  es una permutación de  $X$ . Es fácil comprobar que esta función es invertible ya que

$$g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = 1.x = x.$$

Así que cada vez que tenemos una acción, tendremos una representación de permutaciones. ¿Cuándo sabemos si es una realización o no? En el ejemplo anterior vemos que  $\{1, a^2\}$  da la misma permutación (la identidad) en  $X$ . Además,  $\{a, a^3\}$  también da la misma permutación en  $X$ . Podemos dividir el grupo  $C_4$  en clases de acuerdo con la permutación que dan

$$\left\{ \{1, a^2\}, \{a, a^3\} \right\}$$



Esto nos da una pista de lo que sucede. Antes de que realmente hagamos esto permítanme primero dar algunas proposiciones generales.

**Proposición 4.** *Dado un grupo finito  $G$  y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Deja que*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

- (1)  $\{gH \mid g \in G\}$  es una partición de  $G$
- (2)  $|gH| = |H|$  para todos  $g \in G$
- (3)  $|G|$  es divisible por  $|H|$  y  $|\{gH \mid g \in G\}| = \frac{|G|}{|H|}$

Un **subgrupo**, como antes, es un subconjunto  $\{1\} \subseteq H \subseteq G$  tal que  $H$  es en sí mismo un grupo dentro de  $G$ . Usted ve que (3) se sigue de (1) y (2). Para cualquier  $g \in G$  vemos que una correspondencia de uno a uno

$$\begin{array}{ccc} H & \longleftrightarrow & gH \\ h & \mapsto & gh \\ g^{-1}gh = h & \longleftarrow & gh \end{array}$$

Esto nos da que (2) es siempre verdadero. Ahora (1) necesitan ser bien entendidos. ¿Qué estamos diciendo realmente? Veamos  $C_4$  arriba y observamos que  $H = \{1, a^2\}$  es de hecho un subgrupo. Ahora para el conjunto de conjuntos

$$1H = \{1, a^2\}; \quad aH = \{a, a^3\}; \quad a^2H = \{1, a^2\}; \quad a^3H = \{a, a^3\}.$$

Entonces cuando escribimos

$$\{gH \mid g \in C_4\} = \{\{1, a^2\}, \{a, a^3\}\}$$

Queremos decir que **no repetimos** elementos que son los mismos. Así que lo que (1) está diciendo es que

$$g_1H \cap g_2H \neq \emptyset \implies g_1H = g_2H.$$

**Proposición 5.** *Dado un grupo finito  $G$  que actúa sobre un conjunto finito  $X$ . Dejar que*

$$H = \{g \in G \mid g.x = x \text{ for all } x \in X\}.$$

- (1)  $H$  es un subgrupo de  $G$ .
- (2) La acción da una realización de permutaciones si y sólo si  $|H| = 1$
- (3) Podemos tomar  $X = G$  y la acción es multiplicación a la izquierda, en este caso obtenemos una realización de permutaciones.

Voy a dejar como un ejercicio para mostrar (1). Si nunca has hecho eso, es bueno hacerlo. Si usted ha visto que antes de que sea fácil.

El elemento (2) es sutil. Cuando tenemos una acción  $G \times X \rightarrow X$  hemos visto en el ejercicio que podemos construir un homomorfismo  $\varphi: G \rightarrow S_{|X|}$ . Para un  $g$  fijo, la permutación  $\varphi(g)$  viene dada como  $g$  permuta  $X$  con la función  $x \mapsto g.x$ . Ahora tenemos

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \iff g_1H = g_2H.$$

en efecto

$$g_1.x = g_2.x \iff g_2^{-1}g_1.x = g_2^{-1}g_2.x = x$$

Esto es válido para todos los  $x$  si y sólo si  $g_2^{-1}g_1 \in H$ . Esto es  $g_2^{-1}g_1H = H$  (ya que  $H$  es un subgrupo) y por tanto  $g_1H = g_2H$ . Usted ve que tenemos tantas permutaciones en  $\varphi(G)$  como tenemos elemento en  $\left| \{gH \mid g \in G\} \right| = \frac{|G|}{|H|}$  entonces

$$|\varphi(G)| = \left| \{gH \mid g \in G\} \right| = \frac{|G|}{|H|} = |G| \iff |H| = 1.$$

Ahora (3) es mucho más fácil. Observemos que la acción aquí es  $G \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  la multiplicación habitual, pero pensamos en  $\mathbf{G}$  como el conjunto en el que actuamos. El hecho de que sea una acción es claro al comparar el requisito de acción con la asociatividad y la multiplicación por 1. Si tenemos  $gh = h$  entonces está claro que  $g = gh h^{-1} = h h^{-1} = 1$ . Tan  $H = \{1\}$  solamente.

**Observación 6.** La Proposición 5 (3) nos dicen que cualquier grupo abstracto puede realizarse (al menos en una forma) como un grupo de permutaciones. Esto se conoce como teorema de Cayley.

Vamos a hacer algunos ejemplos. Tome  $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$  (ver Ejemplo 2) y  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Podemos definir

$$\begin{array}{lll} \varphi(a): X \rightarrow X & \varphi(b): X \rightarrow X & \varphi(ab): X \rightarrow X \\ 1 \mapsto a.1 = 2 & 1 \mapsto b.1 = 1 & 1 \mapsto ab.1 = 2 \\ 2 \mapsto a.2 = 1 & 2 \mapsto b.2 = 2 & 2 \mapsto ab.2 = 1 \\ 3 \mapsto a.3 = 3 & 3 \mapsto b.3 = 4 & 3 \mapsto ab.3 = 4 \\ 4 \mapsto a.4 = 4 & 4 \mapsto b.4 = 3 & 4 \mapsto ab.4 = 3 \end{array}$$

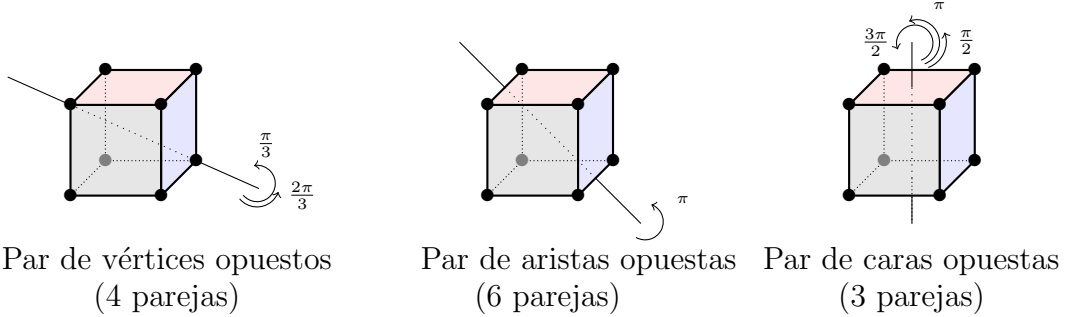
Vemos que  $(\varphi(a))^2 = Id$ ,  $(\varphi(b))^2 = Id$  y  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$ . Entonces, esta es una acción bien definida y tenemos un homomorfismo. Además sólo  $\varphi(1) = Id$  y tenemos una realización de permutaciones de  $C_2 \times C_2$ .

Si en cambio tomamos

$$\begin{array}{lll} \phi(a): X \rightarrow X & \phi(b): X \rightarrow X & \phi(ab): X \rightarrow X \\ 1 \mapsto a.1 = 2 & 1 \mapsto b.1 = 2 & 1 \mapsto ab.1 = 1 \\ 2 \mapsto a.2 = 1 & 2 \mapsto b.2 = 1 & 2 \mapsto ab.2 = 2 \\ 3 \mapsto a.3 = 4 & 3 \mapsto b.3 = 4 & 3 \mapsto ab.3 = 3 \\ 4 \mapsto a.4 = 3 & 4 \mapsto b.4 = 3 & 4 \mapsto ab.4 = 4 \end{array}$$

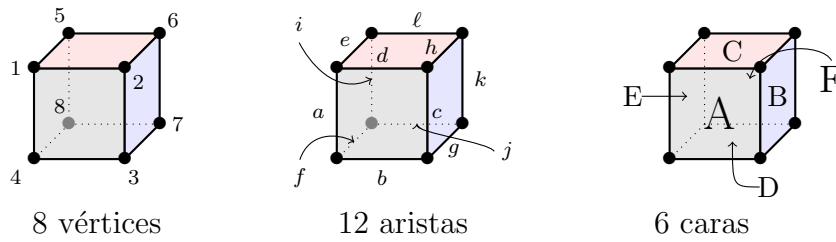
Vemos de nuevo que  $(\phi(a))^2 = Id$ ,  $(\phi(b))^2 = Id$  y  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \phi(b)\phi(a)$ , y esta es una acción diferente del mismo grupo en  $X$ . Pero esta vez  $\phi(1) = \phi(ab) = Id$  y aquí no tenemos una realización de permutaciones desde  $H = \{1, ab\}$ .

3.2. **El cubo.** Nos gustaría tener un ejemplo mucho más grande para entender. Consideremos el grupo  $B_3$  de simetría de un cubo



Este grupo tiene 1 función de identidad,  $4 * 2$  rotaciones de  $\frac{2\pi}{3}$  y  $\frac{\pi}{3}$  para cada par de vértices opuestos, 6 rotaciones de  $\pi$  para cada par de aristas opuestas y  $3 * 3$  rotaciones de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$  para cada par de caras opuestas. Eso es  $24 = 1 + 8 + 6 + 9$ . Este grupo comienza a ser complicado y tomar algún tiempo para escribir la tabla completa de multiplicación. Pronto nombraremos todo su elemento.

Para ayudarnos, vamos a nombre todos los componentes del cubo



El grupo  $B_3$  actúa sobre el conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, A, B, C, D, E, F\}$$

Por ejemplo, la permutación correspondiente a la rotación de  $\frac{2\pi}{3}$  alrededor de la línea a través de los vértices 3 y 5 es

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & \ell & A & B & C & D & E & F \\ \downarrow & \downarrow \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 & h & c & g & k & \ell & d & b & j & e & a & f & i & B & D & F & A & C & E \end{array}$$

En algún momento es mejor escribir eso en la notación de ciclos disjuntos. Para esto simplemente seguimos lo que sucede con el elemento mientras iteramos la misma simetría:  $1 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 1$  y tenemos un ciclo. Simplemente escribimos  $(168)$  y asumimos el ciclo de cerca. Entonces, la permutación anterior es

$$(168)(274)(3)(5)(ahj)(bcg)(dkf)(eli)(ABD)(CFE)$$

La acción que describimos nos da una representación de permutaciones  $\varphi: B_3 \rightarrow S_{26}$ . Esta es una realización de permutaciones de  $B_3$  (se puede ver por qué?). En esta representación de permutaciones, el elemento anterior tiene 8 ciclos de longitud 3 y 2 ciclos de longitud 1. Llamamos a eso la **estructura del ciclos** del elemento. La estructura del ciclos desempeñará

un papel muy importante en la teoría de Polya. Por supuesto, si cambiamos la representación de permutaciones, obtenemos diferentes estructuras de ciclos.

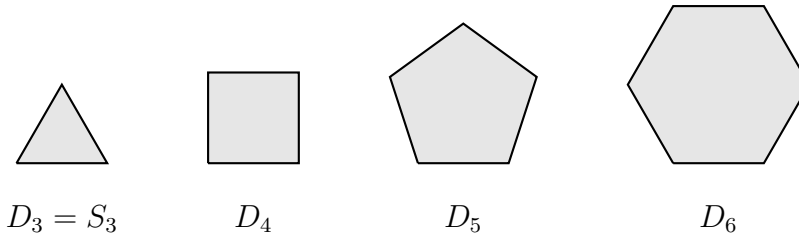
### Ejercicios B.

Ej.3.1 Show that  $H_X$  in Proposición 5 is a subgroup.

Ej.3.2 Let  $G = S_3$ . Find all different actions of  $S_3$  on  $X = \{a, b, c\}$ . In each case describe the corresponding homomorphism  $\varphi: S_3 \rightarrow S_3$ . Describe the cycle structure each elements of  $S_3$ , for each permutation representations you constructed.

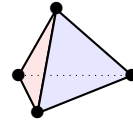
Ej.3.3 Look again at Ej.2.2. Describe the cycle structure of each element of  $C_4$  for this permutation representation.

Ej.3.4  $D_3, D_4, D_5, D_6$ : Study the dihedral groups. These are the group of symmetries



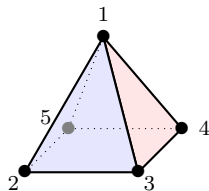
where here we can rotate the figure **and** we can also take it off the table, flip it, and put it back (reflection).

Ej.3.5  $A_4$ : study the group of rotation symmetries of a tetrahedra.



**3.3. Órbitas y conteo de puntos.** Cuando estudiamos las acciones de  $B_3$  en el conjunto  $X$  de vértices, aristas, caras del cubo observamos que una simetría envía un vértice a otro vértice, un arista a otro arista y una cara a una cara. Una simetría preserva los tipos. Esto nos lleva a definir la noción de órbita de un punto  $x \in X$ .

Antes de comenzar vamos a considerar el ejemplo más pequeño. Echemos un vistazo a las simetrías de



Vemos que cualquier simetría necesita fijar el punto 1. Por otro lado, siempre podemos encontrar una simetría que envíe cualquier punto de  $\{2, 3, 4, 5\}$  a otro punto de  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Decimos que el grupo de simetría que actúa sobre los puntos  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  tiene dos órbitas:  $\{1\}$  y  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Vemos que las órbitas codifican la naturaleza de los puntos en nuestros objetos. Así que las órbitas nos dan información interesante sobre las simetrías de los objetos. Ahora vamos a definir órbitas y ver cómo contar puntos dentro de una órbita.

Dado un grupo  $G$  que actúa sobre un conjunto  $X$ , decimos que la **órbita**  $G.x$  de un punto  $x \in X$  es el conjunto

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Este es el conjunto de puntos de  $X$  que podemos alcanzar desde  $x$  con la acción de  $G$ . Vimos arriba un ejemplo de órbitas.

¿Cómo contar el número de puntos dentro de las órbitas de  $X$ ? Es decir, ¿podemos encontrar una fórmula útil para  $|G.x|$ . Ya hemos encontrado este principio. Dejar

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\} \subseteq G$$

Como se ve  $G.x \subseteq X$  y  $\text{Stab}(x) \subseteq G$ . El conjunto  $\text{Stab}(x)$  es de hecho un subgrupo de  $G$ . Esto nos da una buena manera de calcular  $G.x$ :

**Proposición 7** (Teorema de Lagrange). *Por  $x \in X$ , tenemos*

$$|G.x| = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

La idea es construir una biyección explícita entre los dos conjuntos

$$G.x \leftrightarrow \{gS \mid g \in G\}$$

donde  $S = \text{Stab}_x(G)$ . Para cualquier  $y \in G.x$ , hay muchos posibles  $g \in G$  tal que  $y = g.x$ .

$$\begin{aligned} \alpha: G.x &\rightarrow \{gS \mid g \in G\} \\ y &\mapsto gS \text{ donde } g \text{ es tal que } g.x = y \end{aligned}$$

Por supuesto tenemos que asegurarnos de que está bien definido. Eso es si

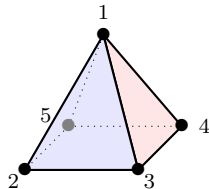
$$y = g.x = h.x \iff h^{-1}g.x = x \iff gS = hS$$

La función en la otra dirección está dada por

$$\begin{aligned} \beta: \{gS \mid g \in G\} &\rightarrow G.x \\ gS &\mapsto g.x \end{aligned}$$

Las dos funciones construyen una correspondencia entre los dos conjuntos.

Si volvemos a nuestro pequeño ejemplo. El grupo de simetrías de



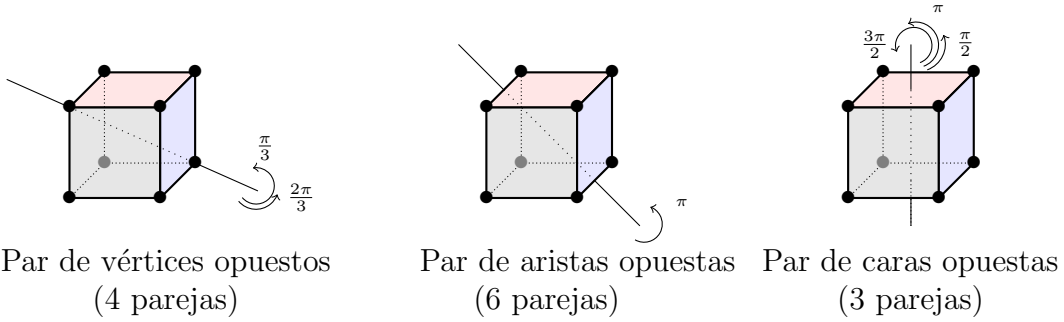
es  $C_4$  (¿ves esto?). Hemos observado 2 órbitas:  $\{1\}$  y  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Por 1, vemos que cada simetría fija 1, entonces

$$\frac{|C_4|}{|\text{Stab}(1)|} = \frac{4}{4} = 1$$

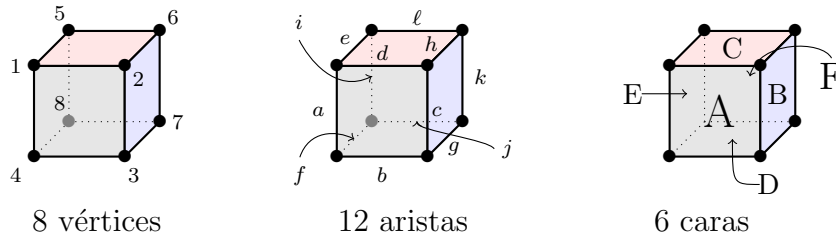
Para cualquiera de los puntos 2, 3, 4 o 5, sólo la simetría de identidad fija tal punto. Obtenemos

$$\frac{|C_4|}{|Stab(2)|} = \frac{4}{1} = 4$$

Si miramos a Sección 3.2, el grupo  $B_3$



actúa sobre el conjunto de vértices, aristas y caras del cubo:



Vemos que exactamente tres simetrías fijan el vértice 1. Por lo tanto

$$|B_{3.1}| = \frac{|B_3|}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Similarmente, sólo dos simetrías fijan la arista  $a$ , entonces

$$|B_{3.a}| = \frac{|B_3|}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Finalmente cuatro simetrías fijan una cara, entonces

$$|B_{3.A}| = \frac{|B_3|}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

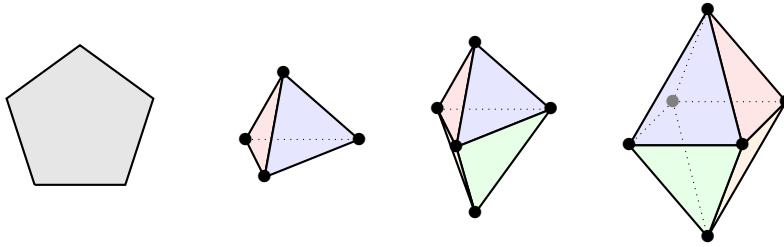
Esto es útil para contar vértices, aristas, caras, de objetos con muchas simetrías. Es aún más útil para las cosas que no podemos ver (como en las dimensiones superiores).

**Ejercicios C.**

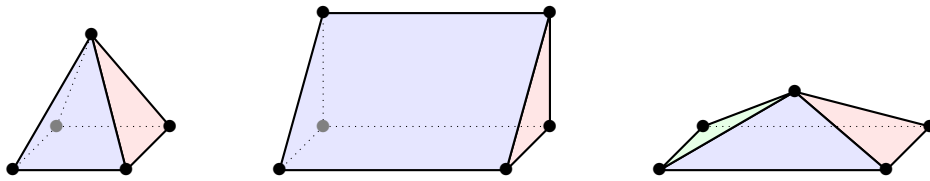
Ej.3.6 Show that  $Stab(x)$  is a subgroup.

Ej.3.7 In Proposición 7, show that  $\alpha \circ \beta = Id$  and  $\beta \circ \alpha = Id$ .

Ej.3.8 Count the number of points, edges and faces of the following objects using Proposición 7.



Ej.3.9 The objects are not always fully symmetric and points, edges and faces are broken into smaller orbits (different kind of points, edges, faces). Understand the orbits to count the number of points, edges and faces of the following objects using Proposición 7 and group of symmetries.

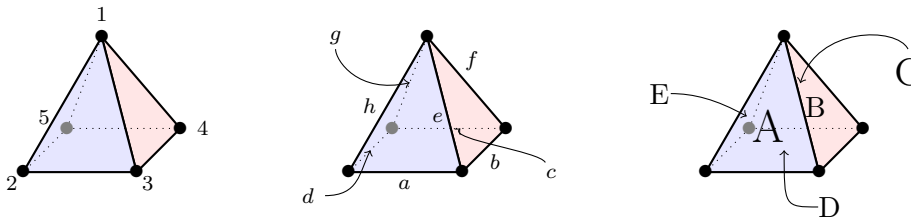


Ej.3.10 Count the number of vertices, edges, 2-faces, 3-faces, ..., of a hypercube of dimension  $n$ .

[hint. find a group of symmetry of the hypercube that contains exactly one orbit for each type of faces]

3.4. **Contando el número de órbitas.** En este punto espero que esté convencido de que el uso de la teoría de grupos es poderoso para contar cosas relacionadas con la simetría. Nuestro siguiente paso es contar el número de órbitas. Como hemos visto anteriormente, podemos ver esto como contando el número de tipos de puntos que tenemos.

Veamos nuevamente  $C_4$  actuando sobre la pirámide cuadrada y consideremos sus vértices, aristas y caras.



El grupo  $C_4$  actúa sobre el conjunto  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e, f, g, h, A, B, C, D, E\}$ . Este conjunto se descompone en órbitas disjuntas. Denotamos esto como

$$Y/C_4 = \left\{ \{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c, d\}, \{e, f, g, h\}, \{A, B, C, D\}, \{E\} \right\}$$

Vemos que el número de órbitas cuentan los diferentes tipos de cosas.

En cuanto al número de elementos en una órbita, también hay fórmula muy hermosa para contar el número de órbitas de una acción. Deje que  $G$  actúe sobre un conjunto  $X$  y defina

$$Fix(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

**Proposición 8** (Lema de Burnside). *Por  $G$  actuando sobre un conjunto  $X$ , tenemos*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Esto no es difícil de ver después de algunas manipulaciones de los conceptos que hemos visto

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |Fix(g)| &= \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} \delta_{x,g.x} = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G} \delta_{x,g.x} \\ &= \sum_{x \in X} |Stab(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G.x|} \\ &= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G.x|} = |G| |X/G| \end{aligned}$$

La última igualdad es un buen truco.

Así que si queremos contar el número de órbita de una acción, simplemente necesitamos encontrar la cardinalidad del conjunto  $Fix(g)$  para cada  $g \in G$ . Veamos nuevamente  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  actuando sobre  $Y$  arriba. Encontramos eso

$$\begin{aligned} Fix(\mathbf{1}) &= Y \\ Fix(a) &= \{1, D\} \\ Fix(a^2) &= \{1, D\} \\ Fix(a^3) &= \{1, D\} \end{aligned}$$

Hence

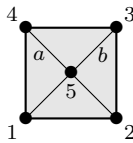
$$|Y/C_4| = \frac{1}{4}(18 + 2 + 2 + 2) = \frac{24}{4} = 6$$

Siempre me maravillo del hecho de que esto funciona tan bien.

### Ejercicios D.

Ej.3.10 Look at the actions you defined in Ej.3.8 and Ej.3.9 and use Proposición 8 to count the number of orbits

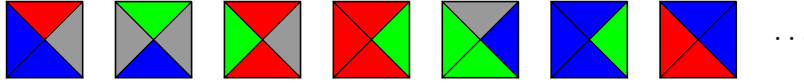
Ej.3.11 Consider the actions of  $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$  on the set  $Z = \{1, 2, 3, 4, a, b\}$  as the five vertices  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  and two diagonal segment  $\{a, b\}$  pictured bellow. Use Proposición 8 to count the number of orbits



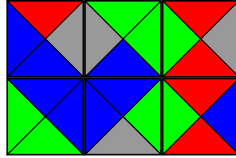


## 4. COLORACIÓN Y TEORÍA DE POLYA

Supongamos que su amiga Laura quiere crear un juego con piezas que son teja como



El juego será tejar un tablero de  $2 \times 3$  de modo que el color coincida donde la teja toca. Un buen juego terminará con un mosaico como este:



Pero a ella le gustaría saber cuántos tipos de tejas necesitamos, y cuántos diferentes buenos juegos serán posibles. Vamos a tratar de ayudar...

**4.1. Coloraciones de acciones.** Cuando tenemos un conjunto finito  $X$ , una **coloración** de  $X$  con ciertos colores es una función  $w: X \rightarrow \{\text{colores}\}$ . De hecho, si usted tiene un conjunto como  $X = \{1, 2, 3\}$  y su tiene dos colores *rojo* y *azul*, puede hacer 8 coloraciones diferentes. A saber

123; 123; 123; 123; 123; 123; 123; 123;

Esto es lo mismo que las funciones  $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ . Si  $C$  es un conjunto de color, entonces denotamos por  $C^X$  el conjunto de todos los coloraciones de  $X$  por  $C$ . Ese es el conjunto de todas las funciones

$$C^X = \{w: X \rightarrow C \text{ funciones}\}$$

Para nuestro ejemplo anterior con  $X = \{1, 2, 3\}$  y  $C = \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  obtenemos

$$C^X = \{123, 123, 123, 123, 123, 123, 123, 123\}$$

Ahora, cuando un grupo  $G$  actúa sobre  $X$ , entonces  $G$  **también** actúa sobre el conjunto más grande de todos los coloraciones  $C^X$  de manera natural. De hecho, si  $w \in C^X$ , deja  $(g.w)(x) = w(g^{-1}.x)$  y funciona. Aquí  $g.w$  es una nueva función construida desde  $w$ . Necesitamos usar la inversa de  $g$  en esta definición para que el “tecnicismo” de la definición de acción funcione para la acción en  $C^X$ .

$$((hg).w)(x) = w((hg)^{-1}.x) = w((g^{-1}h^{-1}).x) = w(g^{-1}.(h^{-1}.x)) = (g.w)(h^{-1}.x) = (h.(g.w))(x)$$

Puse esto aquí para mostrarle el tecnicismo en mostrar que  $(hg).w = h.(g.w)$ . Trate de entender cada igualdad. Este tecnicismo es importante para que las cosas funcionen bien, pero no jugarán un gran papel al final.

Permite trabajar con nuestro ejemplo y el grupo de permutaciones  $S_3$  actuando sobre  $X = \{1, 2, 3\}$  (permuta los números). Recordar que

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

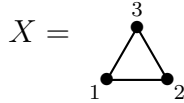
Y cada  $\sigma \in S_3$  es una permutación  $\sigma: X \rightarrow X$  y tenemos una acción. Sea  $C = \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  y considere  $w \in C^X$ . Por ejemplo, **123** es la función  $w(1) = \text{rojo}$ ,  $w(2) = \text{azul}$  y  $w(3) = \text{rojo}$ . Sea  $\sigma = 231$  y compruebe que  $\sigma^{-1} = 312$ . Así que la nueva función  $\sigma.w$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} (\sigma.w)(1) &= w(\sigma^{-1}(1)) = w(3) = \text{rojo} \\ (\sigma.w)(2) &= w(\sigma^{-1}(2)) = w(1) = \text{rojo} \\ (\sigma.w)(3) &= w(\sigma^{-1}(3)) = w(2) = \text{azul} \end{aligned}$$

Así que  $\sigma.w = \text{123}$ . Si observamos las órbitas de  $X$  con la acción de  $S_3$  vemos que sólo hay una órbita ( $X$  es una sola órbita). Pero si miramos las órbitas de la acción sobre  $C^X$ , surge una imagen muy diferente:

$$C^X/S_3 = \left\{ \{\text{123}\}, \{\text{123, 123, 123}\}, \{\text{123, 123, 123}\}, \{\text{123}\} \right\}$$

Podemos representar esto en un triángulo. Recordemos que  $S_3 = D_3$  es la simetría del triángulo permitiendo volteretas y rotaciones



El conjunto  $C^X/S_3$  se puede representar como

$$C^X/S_3 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \right\} \right\}$$

Como puede ver, cada orbita representa **un** tipo posible de collar con tres perlas y dos colores de perlas diferentes. Así que podemos usar Proposición 8 para contar el número de posibilidades. Primero tenemos que averiguar qué es  $Fix(g)$  para cada simetría en el conjunto  $C^X$ . Veamos primero nuestro ejemplo. Para  $Id = 123 \in S_3$  es fácil como 123 siempre fijar todo las coloraciones

$$Fix(Id) = C^X \quad \implies \quad |Fix(123)| = |C|^{|X|} = 2^3 = 8$$

Luego miramos las otras permutaciones:

$$Fix(132) = \{\{\text{123, 123, 123, 123}\}\} \implies |Fix(132)| = 4 = 2^2$$

$$Fix(213) = \{\{\text{123, 123, 123, 123}\}\} \implies |Fix(213)| = 4 = 2^2$$

$$Fix(231) = \{\{\text{123, 123}\}\} \implies |Fix(231)| = 2 = 2^1$$

$$Fix(312) = \{\{\text{123, 123}\}\} \implies |Fix(312)| = 2 = 2^1$$

$$Fix(321) = \{\{\text{123, 123, 123, 123}\}\} \implies |Fix(321)| = 4 = 2^2$$

Usando Proposición 8 obtenemos la respuesta correcta:

$$|C^X/S_3| = \frac{1}{6}(8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 4) = \frac{24}{6} = 4$$

Notaste que  $|Fix(g)|$  siempre es un poder de  $|C| = 2$ , esto no es un accidente.

**Proposición 9.** Deje que  $G$  actúen sobre  $X$ . Como arriba obtenemos una acción de  $G$  sobre  $C^X$ . Por  $g \in G$ , tenemos que

$$w \in Fix(g) \iff w(x) = w(g.x) = w(g^2.x) = w(g^3.x) = \dots \text{ para todos los } x \in X$$

Es decir,  $w$  es constante durante los ciclos de  $G$  para la acción en  $X$

Tenga cuidado aquí, tenemos **dos** acciones a considerar. La acción de  $G$  sobre  $X$  y la acción de  $G$  sobre  $C^X$ . Estamos interesados en el conjunto  $Fix(g)$  para la acción de  $G$  en  $C^X$ , pero para calcularlo, utilizamos la acción de  $G$  sobre  $X$ . Vemos en la Proposición que estamos interesados en los ciclos disjuntos de  $g$  sobre  $X$ . Recuerde que los ciclos de  $g \in G$  se obtiene observando lo que sucede cuando aplicamos un poder sucesivo de  $g$  a los elementos de  $X$ :  $x \rightarrow g.x \rightarrow g^2.x \rightarrow \dots$  hasta que regresemos  $x$ . Si  $w$  es fijo por  $g$ , es decir  $(g.w)(x) = w(x)$ , entonces aplicando  $g^{-1}$  ambos lados obtenemos

$$w(x) = (g^{-1}.w)(x) = w(g.x)$$

Aplicando  $g^{-1}$  de nuevo a la igualdad arriba obtenemos

$$w(g.x) = (g^{-1}.w)(x) = (g^{-2}.w)(x) = w(g^2.x)$$

Y podemos seguir así para mostrar una de las implicaciones de la Proposición 9.

En la notación de ciclos, la permutación 213 es (1 2)(3). Mire otra vez  $Fix(213)$  y de hecho todos los coloraciones del conjunto tienen el mismo color para el ciclo (1 2) y para el ciclo (3). Por otro lado, 231 es un solo ciclo (1 2 3) y sólo 2 colores son constantes en este ciclo. Os dejo a vosotros ver lo contrario de la proposición anterior. Lo que hemos visto hasta ahora es que cuando  $G$  actúa sobre  $C^X$  tenemos

$$|Fix(g)| = |C|^{|cyc_X(g)|}$$

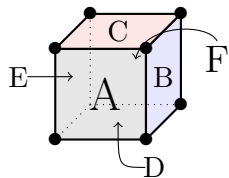
donde  $cyc_X(g)$  es la descomposición del ciclo de  $g$  para la acción en  $X$ .

**Teorema 10.** Dado  $G$  actuando en  $X$ . Tenemos que  $G$  actúa sobre  $C^X$ . Sea  $c = |C|$ ,

$$|C^X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} c^{|cyc_X(g)|}$$

Usted entiende que esto viene de Proposición 8 y Proposición 9.

**Ejercicios E.** Our friend Laura that just learned about this theorem is pretty sure we can use that to solve her question. Lets do that together...first some warm up.

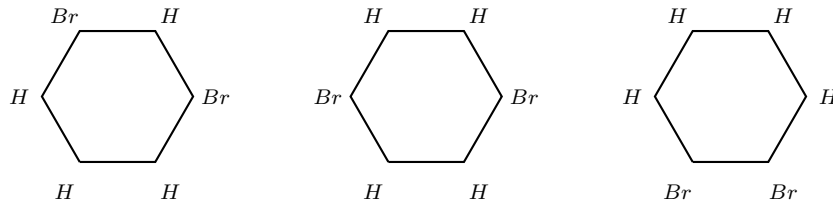
Ej.4.1 Let  $B_3$  act on the cube  and let  $X = \{A, B, C, D, E, F\}$  be the set

of faces. Consider  $C = \{\text{rojo}, \text{black}, \text{azul}, \text{green}\}$  and  $B_3$  acting on the coloring  $C^X$ . Now answer the first question we had: how many different dices with four colors can we construct.

Ej.4.2 Now answer the second questions we have seen: how many necklaces of 8 beads of 3 different kind can we make? [hint: use  $D_8$  acting on an octogone]

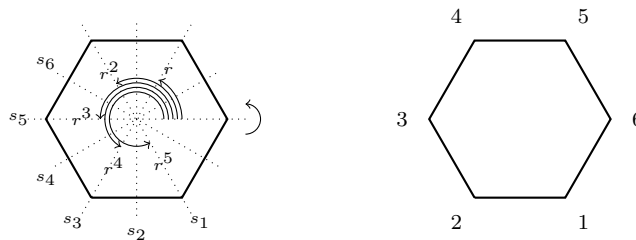
Ej.4.3 Solve the two questions of Laura. Keep in mind that the tiles are colored on one side only.

4.2. **Teoría de Polya.** Hoy, Laura dijo que es una mala idea tener el mismo color en una sola teja más de dos veces. Esto haría el juego más interesante si no permitimos el mismo color más de dos veces en cada teja. ¿Pero ahora todo nuestro conteo necesita ser rehecho? No está segura de que podamos resolver su problema. Pero ella oyó que un químico nombre Polya tenía un problema similar y encontró una solución. La molécula  $C_6H_4Br_2$  es 6 átomos de carbono (C) en un hexágono y los átomos de hidrógeno (H) y Bromo (Br) se unen de forma circular alrededor de él. Pero en la naturaleza hay más de una posibilidad y la molécula puede tener un comportamiento diferente dependiendo de la configuración



Quería también entender la posible configuración de una molécula más compleja y para ello necesitaba refinar el principio de contar y poder contar coloraciones con un tipo de colores especificado (cuántos de cada color). Para esto necesitamos refinar nuestra grabación de conteo cuáles colores fueron usados.

Vamos a seguir un ejemplo. Recuerde que  $D_6 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$  actúan sobre el hexágono como se muestra abajo y esto define una acción en los vértices  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ :



Hemos visto en Teorema 10 que el número de ciclos para cada elemento del grupo desempeña un papel importante en el conteo de coloraciones. Si queremos refinar nuestro conteo, ahora tenemos que estudiar exactamente el tipo de ciclos de cada elemento de  $D_6$  usando la representación de permutaciones con respecto a  $X$ . Para ello utilizaremos monomio para codificar el tipo de ciclos de cada elemento. Por ejemplo, si un elemento tiene 2 ciclos de longitud 1, 3 ciclos de longitud 2 y 1 ciclo de longitud 4, entonces lo codificaremos con un monomio

$$x_1^2 x_2^3 x_4$$

En general, el exponente de  $x_i$  es el número de ciclos de longitud  $i$  en nuestra representación de permutaciones del elemento. Por  $D_6$  actuando sobre  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  arriba tenemos

elemento de $D_6$	tipo de ciclos	monomio de ciclos
1	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	$x_1^6$
$r$	(1 2 3 4 5 6)	$x_6$
$r^2$	(1 3 5)(2 4 6)	$x_3^2$
$r^3$	(1 4)(2 5)(3 6)	$x_2^3$
$r^4$	(1 5 3)(2 6 4)	$x_3^2$
$r^5$	(1 6 5 4 3 2)	$x_6$
$s_1$	(1)(4)(2 6)(3 5)	$x_1^2 x_2^2$
$s_2$	(1 2)(3 6)(4 5)	$x_2^3$
$s_3$	(2)(5)(1 3)(4 6)	$x_1^2 x_2^2$
$s_4$	(2 3)(1 4)(5 6)	$x_2^3$
$s_5$	(3)(6)(2 4)(1 5)	$x_1^2 x_2^2$
$s_6$	(3 4)(2 5)(1 6)	$x_2^3$

Ahora ponemos toda esta información en un polinomio (la suma de todos los monomios) que producimos

$$P_{D_6, X}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{12}(x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2)$$

Llamamos a esto el **polinomio índice de ciclos** de la representación de permutaciones de  $D_6$ . El factor  $\frac{1}{12}$  está ahí, ya que jugará un papel en el resultado final. Este polinomio no utiliza las variables  $x_4$  y  $x_5$  en este caso.

En general, considere un grupo  $G$  que actúa sobre un conjunto finito  $X$  donde  $n = |X|$ . El índice de ciclos de la representación de permutaciones de  $G$  sobre  $X$  es

$$P_{G, X}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{|cyc_{X,1}(g)|} x_2^{|cyc_{X,2}(g)|} \dots x_n^{|cyc_{X,n}(g)|}$$

donde  $cyc_{X,i}(g)$  es el número de ciclos de longitud  $i$  en la representación de permutaciones de  $g$  con  $X$ . Observamos de inmediato que si coloreamos la acción con  $c = |C|$  colores, Teorema 10 se puede escribir como sigue

$$|C^X/G| = P_{G, X}(c, c, \dots, c).$$

¿Ves esto?

Por  $D_6$

$$P_{D_6, X}(c, c, c, c, c, c) = \frac{1}{12}(c^6 + 2c + 2c^2 + 4c^3 + 3c^2 c^2) = \frac{1}{12}(c^6 + 2c + 2c^2 + 4c^3 + 3c^{2+2}).$$

Ahora el exponente de  $c$  en el lado derecho, cuenta exactamente el número de ciclos como en Teorema 10.

Si queremos refinar nuestro conteo, podemos usar el polinomio de índice de ciclo que conoce el tamaño de cada ciclo. Recuerde que un colorante debe respetar los ciclos de un elemento para ser fijado por este elemento. La variable  $x_i$  en el polinomio índice de ciclos aporta un ciclo de longitud  $i$ . En lugar de sustituir  $x_i \leftarrow c$ , podemos intentar mantener un registro de

qué color se usó y cuántas veces. La manera de codificar que con la función de generación es hacer

$$x_i \leftarrow a_1^i + a_2^i + \cdots + a_c^i$$

Entendemos el lado derecho como “eligiendo” (el “+”) un color de  $\{a_1, a_2, \dots, a_c\}$  y usándolo  $i$ -veces.

Veamos lo que sucede cuando hacemos esto con  $P_{D_6, X}$  teniendo dos colores  $\{a, r\}$ :

$$\begin{aligned} P_{D_6, X}(a+r, a^2+r^2, a^3+r^3, a^4+r^4, a^5+r^5, a^6+r^6) \\ = \frac{1}{12}((a+r)^6 + 2(a^6+r^6) + 2(a^3+r^3)^2 + 4(a^2+r^2)^3 + 3(a+r)^2(a^2+r^2)^2) \end{aligned}$$

Vamos a expandir cada monomio:

$$\begin{aligned} (a+r)^6 &= a^6 + 6a^5r + 15a^4r^2 + 20a^3r^3 + 15a^2r^4 + 6ar^5 + r^6 \\ a^6+r^6 &= a^6 + r^6 \\ (a^3+r^3)^2 &= a^6 + 2a^3r^3 + r^6 \\ (a^2+r^2)^3 &= a^6 + 3a^4r^2 + 3a^2r^2 + r^6 \\ (a+r)^2(a^2+r^2)^2 &= (a^2+2ar+r^2)(a^4+2a^2r^2+r^4) \\ &= a^6 + 2a^5r + 3a^4r + 2a^3r + 3a^2r + 2ar^5 + r^6 \end{aligned}$$

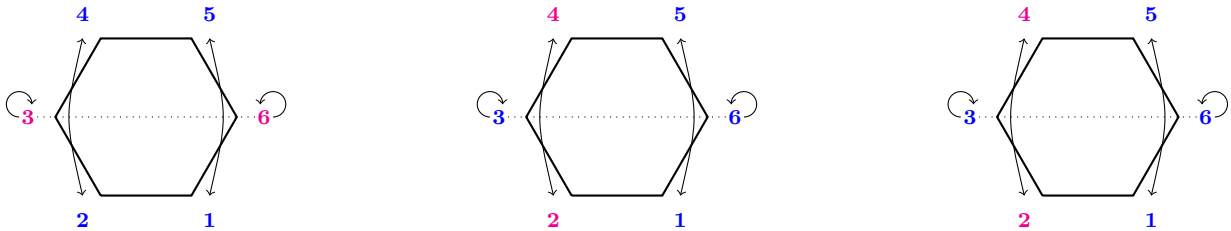
Cada expansión monomial “cuenta” el número de coloraciones fijado por un elemento de  $D_6$ . Por ejemplo,  $s_5 \in D_6$  tiene ciclos  $(3)(6)(24)(15)$ . Sabemos que un color será fijado una vez que escojamos un color para 3, 6,  $\{2, 4\}$  (misma color) y  $\{1, 5\}$  (misma color). El monomio de ciclos es  $x_1^2x_2^2$ . Cuando sustituimos  $x_1 \leftarrow a+r$  y  $x_2 \leftarrow a^2+r^2$  producimos todas las opciones de elegir un color  $(a+r)(a+r)(a^2+r^2)(a^2+r^2)$  para 3, 6,  $\{2, 4\}$  y  $\{1, 5\}$ , respectivamente. Entonces, la expansión

$$a^6 + 2a^5r + 3a^4r + 2a^3r + 3a^2r + 2ar^5 + r^6$$

Nos da un refinamiento de contar los coloraciones que se fijan por  $s_5$  teniendo en cuenta cuántas veces se utiliza un color. Por ejemplo, el coeficiente 3 delante de  $a^4r^2$  significa que hay 3 colores que serán fijados por  $s_5$  con cuatro  $a$  y Dos  $r$ . Cuando expandimos  $(a+r)(a+r)(a^2+r^2)(a^2+r^2)$  podemos obtener  $a^4r^2$  de tres maneras diferentes:

$$\begin{aligned} (a+r)(a+r)(\underline{a^2+r^2})(\underline{a^2+r^2}) \\ (\underline{a+r})(\underline{a+r})(a+\underline{r^2})(\underline{a^2+r^2}) \\ (\underline{a+r})(\underline{a+r})(\underline{a^2+r^2})(a+\underline{r^2}) \end{aligned}$$

Cada forma de obtener el monómico  $a^4r^2$  corresponde exactamente a una opción de color que se fija por  $s_5$  seleccionando el color que ponemos en cada ciclo 3, 6,  $\{2, 4\}$  y  $\{1, 5\}$  respectivamente. Son (enumerados de la misma manera que conseguimos los monomios arriba)



Donde aquí coloreé el elementos de  $X$  rojo para los  $r$  y azul para los  $a$ . Entonces si continuamos nuestra expansión de  $P_{D_6, X}$

$$\begin{aligned} P_{D_6, X}(a + r, a^2 + r^2, a^3 + r^3, a^4 + r^4, a^5 + r^5, a^6 + r^6) \\ = \frac{1}{12}(12a^6 + 12a^5r + 36a^4r^2 + 24a^3r^3 + 36a^2r^4 + 12ar^5 + 12r^6) \\ = a^6 + a^5r + 3a^4r^2 + 2a^3r^3 + 3a^2r^4 + ar^5 + r^6 \end{aligned}$$

Cuando hacemos esto, delante de cada monomio usamos Proposición 8 para cada distribución de colores por separado. Entonces

$$P_{D_6, X} = a^6 + a^5r + 3a^4r^2 + 2a^3r^3 + 3a^2r^4 + ar^5 + r^6$$

Nos da la distribución de coloraciones posible dependiendo de cuántas veces se utiliza cada color. De hecho la pregunta de Polya se responde ya que hay exactamente tres coloraciones posibles de un exágono usando 2  $Br$  y 4  $H$ . Es el coeficiente de  $a^2r^4$  en  $P_{D_6, X}$  después de la sustitución  $x_i \leftarrow a^i + r^i$ .

Resumimos todo nuestro entendimiento general como sigue

**Teorema 11** (Polya). *Dado un grupo  $G$  actuando sobre un conjunto  $X$ . Sea  $c = |C|$  y considere la acción de  $G$  sobre  $C^X$ .*

(a) Calcule  $P_{G, X}$  y

$$P_{G, X}(c, c, \dots, c) = |C^X/G|$$

(b) Calcule la sustitución  $x_i \leftarrow a_1^{d_1} + a_2^{d_2} + \dots + a_c^{d_c}$  in  $P_{G, X}$ . El coeficiente de  $a_1^{d_1} a_2^{d_2} \dots a_c^{d_c}$  en el polinomio resultante es el número de coloraciones de  $X$  con el color  $a_i$  usado  $d_i$  veces.

**Ejercicios F.** Now we will try to solve Laura's question. Again, lets warm up a little bit before

Ej.4.4 For each permutation representation we have encounter this week.

- Give the cycle index polynomials
- Count the number of coloring using 3 colors
- Count the number of coloring using 3 colors, but not repeating any color in a coloring
- Count the number of coloring using 3 colors, but having one color repeated once.

Ej.4.5 Count the number of way to construct the Laura's tile with no colors used more than twice.

Ej.4.6 Can you count the number of Laura's good  $2 \times 3$  tiling using only the tiles in Ej.4.6?

Ej.4.6 Can you do coloring in higher dimension? (coloring of polytopes)?

## REFERENCES

1. Richard A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Pearson (2010).
2. G. Pólya and R. C. Read *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds* Springer-Verlag (1987).

NANTEL BERGERON, DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS, YORK UNIVERSITY, TORONTO,  
ONTARIO M3J 1P3, CANADA

*E-mail address:* [bergeron@mathstat.yorku.ca](mailto:bergeron@mathstat.yorku.ca)

*URL:* <http://www.math.yorku.ca/bergeron/>