Représentations et super-représentations des groupes

YORK

UNIVERSITÉ

UNIVERSITY

Nantel Bergeron

www.math.yorku.ca/bergeron

E-Mail: **bergeron@yorku.ca**

(avec **C. Benedetti, N. Thiem**

... et autres)

Montréal

Mai 2015

Outline

- Représentations des groupes symétriques
- Opérations sur les représentations et les fonctions symétriques
- Algèbres de Hopf combinatoires
- Super-représentations
- Opérations sur les super-représentations et les fonctions symétriques non-commutatives.

Représentations des groupes symétriques

Groupe symétrique: $S_n = \{\sigma\colon [n] \xrightarrow{\sim} [n]\}$ où $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

S_3: $\begin{smallmatrix}123\\123\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\132\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\213\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\231\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\312\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\321\end{smallmatrix}$

Représentations des groupes symétriques

Groupe symétrique: $S_n = \{\sigma\colon [n] \xrightarrow{\sim} [n]\}$ où $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

S_3: $\begin{matrix} 123 & 123 & 123 & 123 & 123 & 123 \\ 123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321 \end{matrix}$

Action linéaire de S_n sur V: $\varphi\colon S_n \longrightarrow \mathrm{Gl}(V)$

S_3 sur $\mathbb{R}^3$: pour $\sigma \in S_3$, $\varphi(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\right)$

Représentations des groupes symétriques

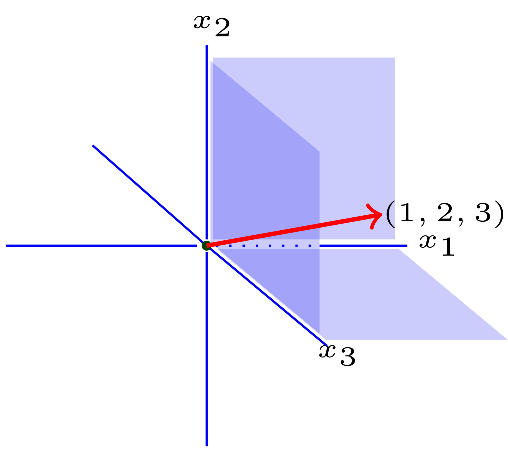
Groupe symétrique: $S_n = \{\sigma\colon [n] \xrightarrow{\sim} [n]\}$ où $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

S_3: $\begin{smallmatrix}123\\123\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\132\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\213\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\231\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\312\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\321\end{smallmatrix}$

Action linéaire de S_n sur V: $\varphi\colon S_n \longrightarrow \mathrm{Gl}(V)$

S_3 sur $\mathbb{R}^3$: pour $\sigma \in S_3$, $\varphi(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$

$\varphi(\sigma)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$:



Représentations des groupes symétriques

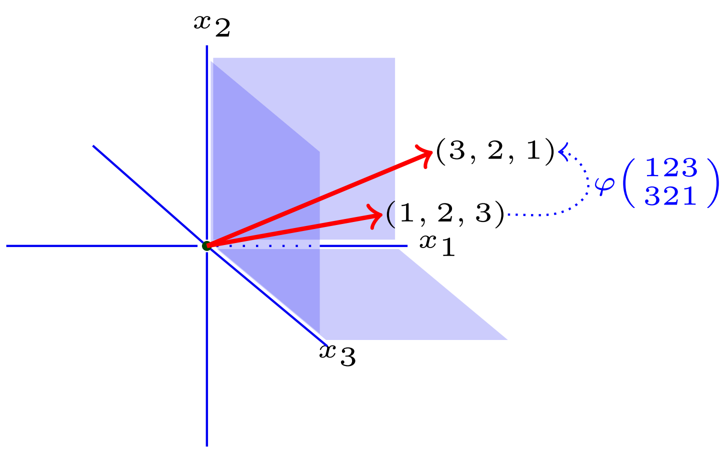
Groupe symétrique: $S_n = \{\sigma\colon [n] \xrightarrow{\sim} [n]\}$ où $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

S_3: $\begin{smallmatrix}123\\123\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\132\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\213\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\231\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\312\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}123\\321\end{smallmatrix}$

Action linéaire de S_n sur V: $\varphi\colon S_n \longrightarrow \mathrm{Gl}(V)$

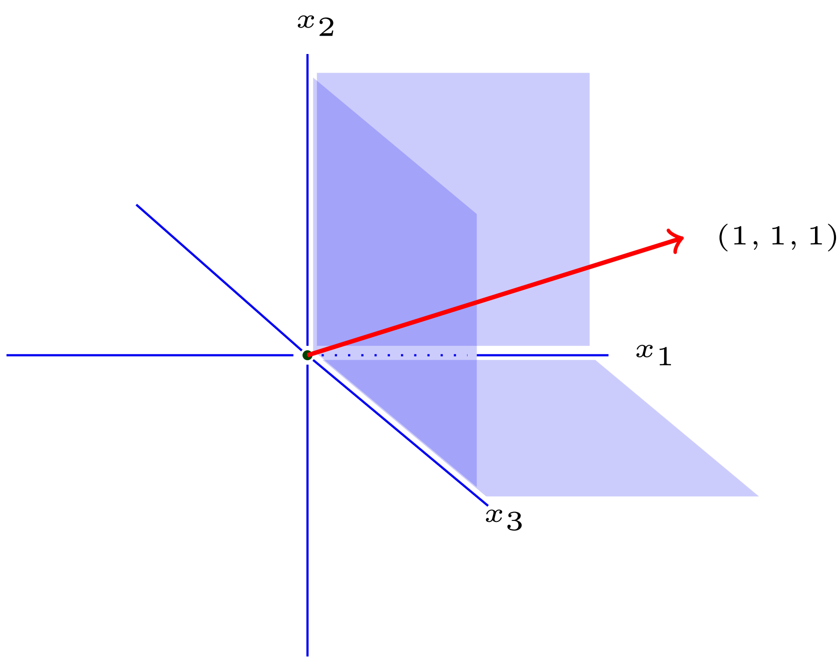
S_3 sur $\mathbb{R}^3$: pour $\sigma \in S_3$, $\varphi(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$

$\varphi(\sigma)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$:



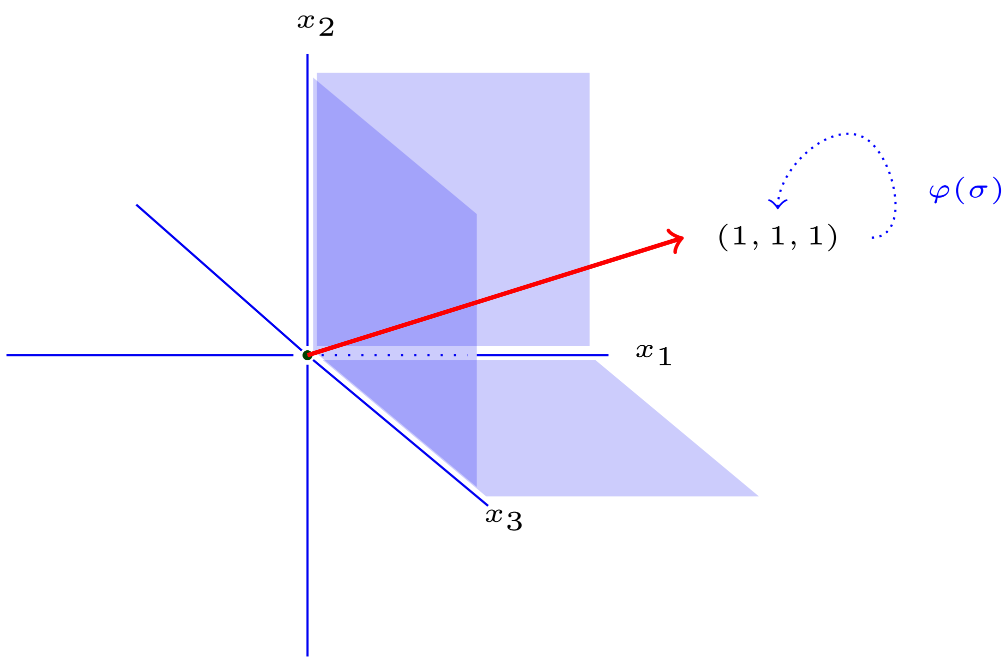
Représentations des groupes symétriques

Décomposition en irréductibles: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$



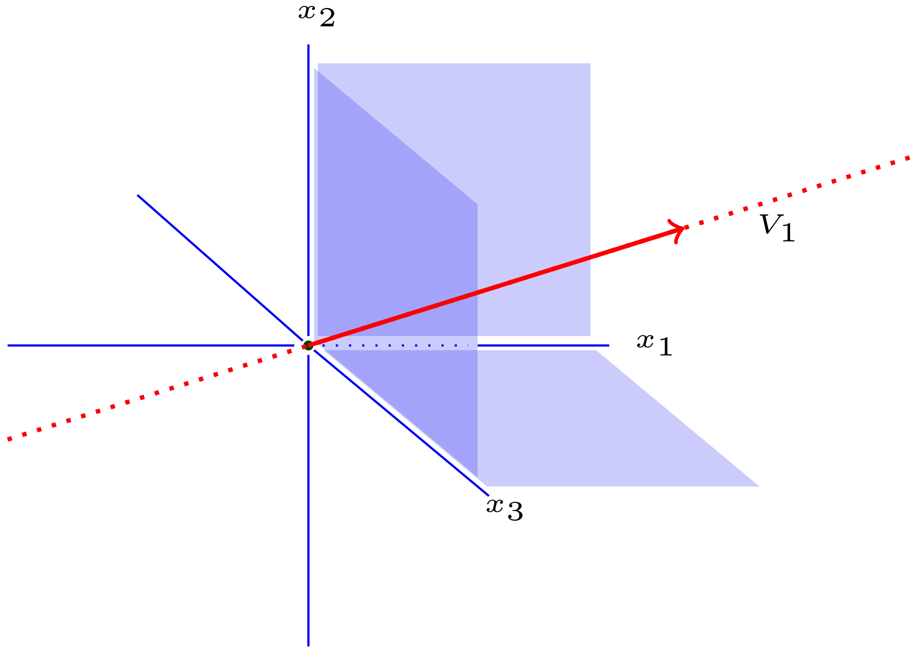
Représentations des groupes symétriques

Décomposition en irréductibles: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$



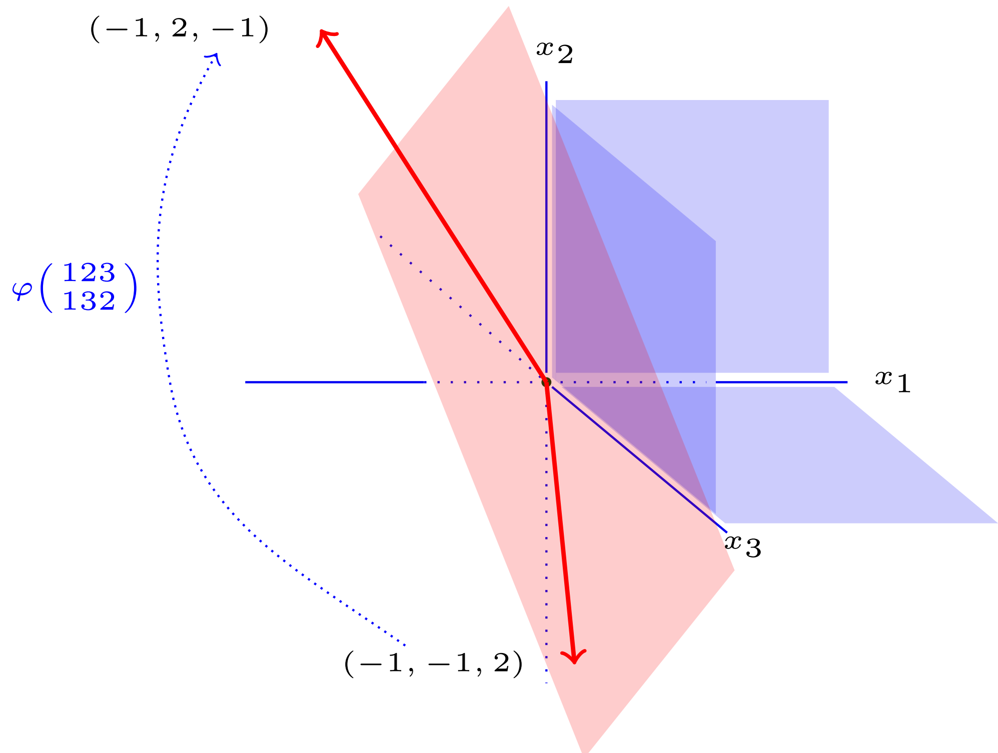
Représentations des groupes symétriques

Décomposition en irréductibles: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$



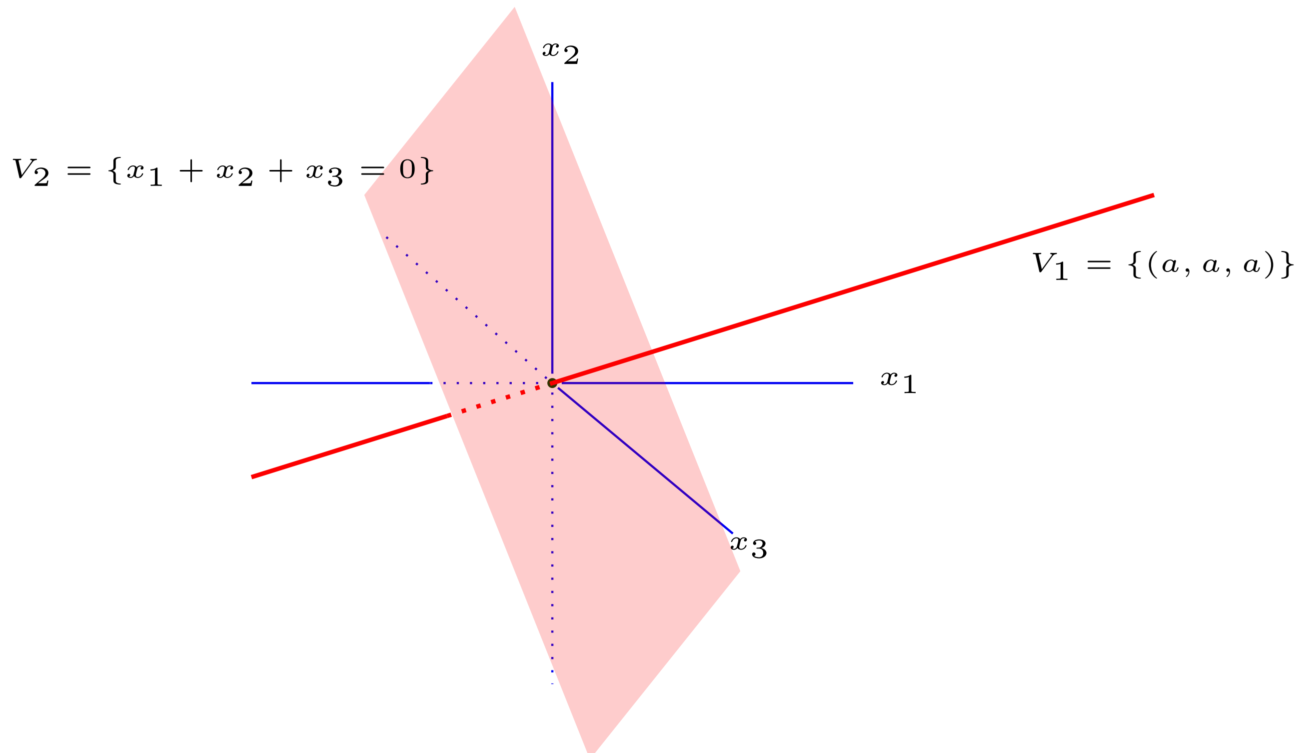
Représentations des groupes symétriques

Décomposition en irréductibles: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$



Représentations des groupes symétriques

Décomposition en irréductibles: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$



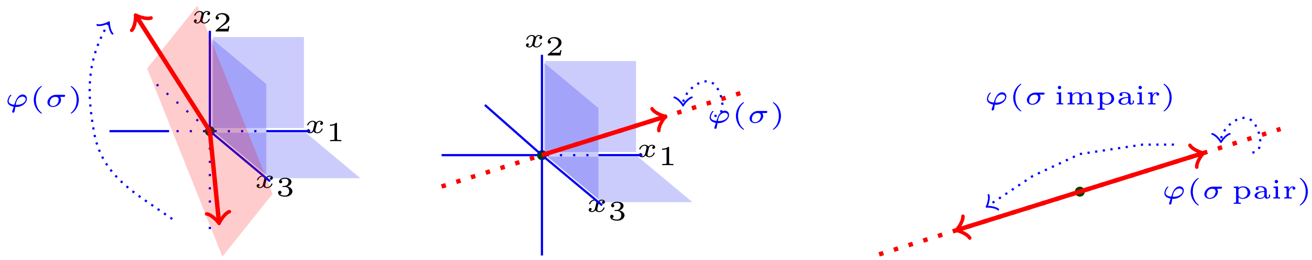
$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2.$$

Représentations des groupes symétriques

Décomposition en irréductibles: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$

Pour chaque groupe il y a un nombre fini d'irréductibles
(à isomorphisme près)

Pour S_3 :

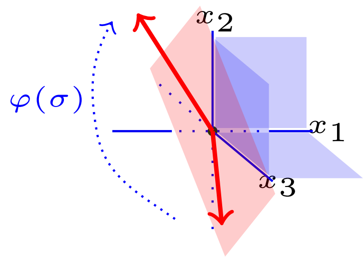


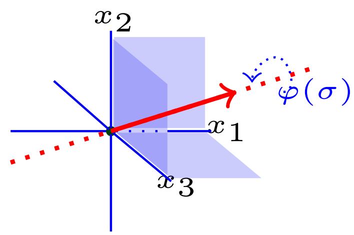
Représentations des groupes symétriques

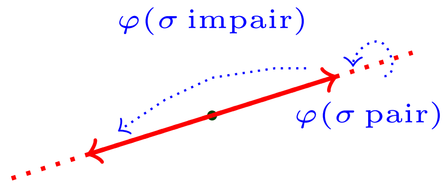
Décomposition en irréductibles: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$

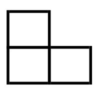
Pour chaque groupe il y a un nombre fini d'irréductibles (à isomorphisme près)

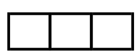
Pour S_3 :

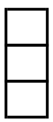






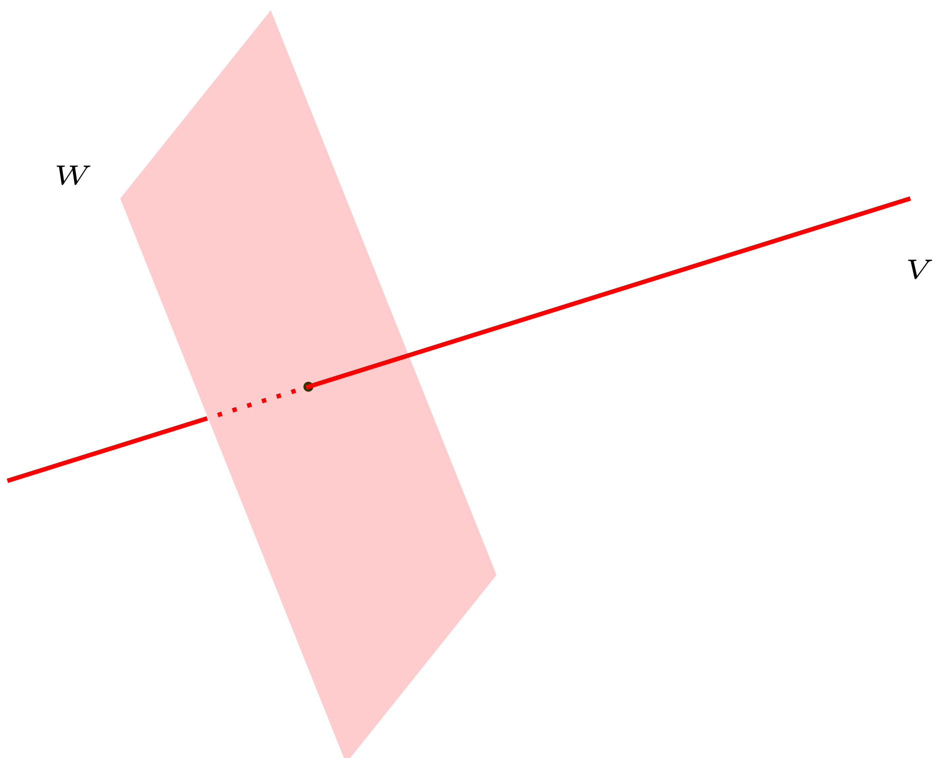






Opérations sur les représentations

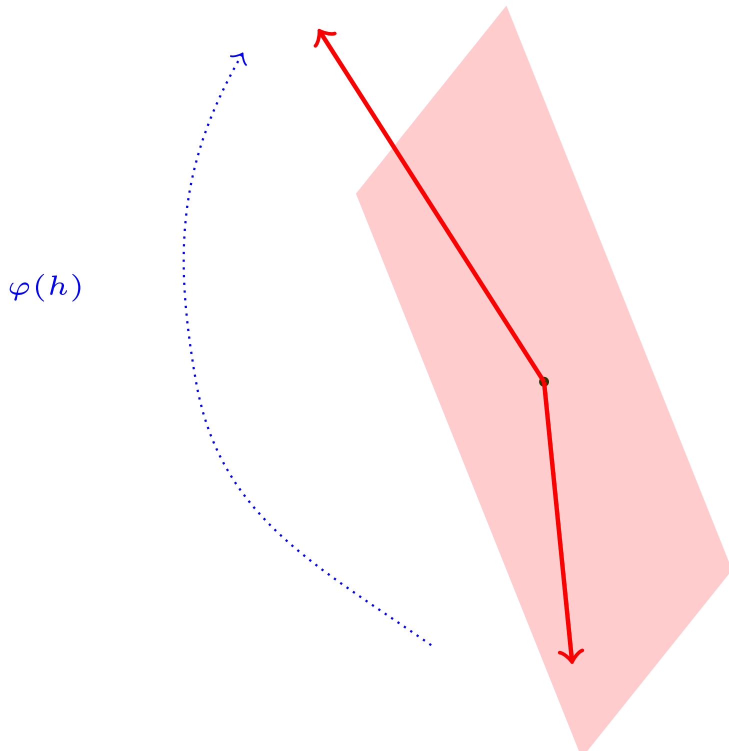
$V \oplus W$



Opérations sur les représentations

$V \oplus W$

$\mathrm{Res}^G_H V \quad$ pour $h \in H \leq G$

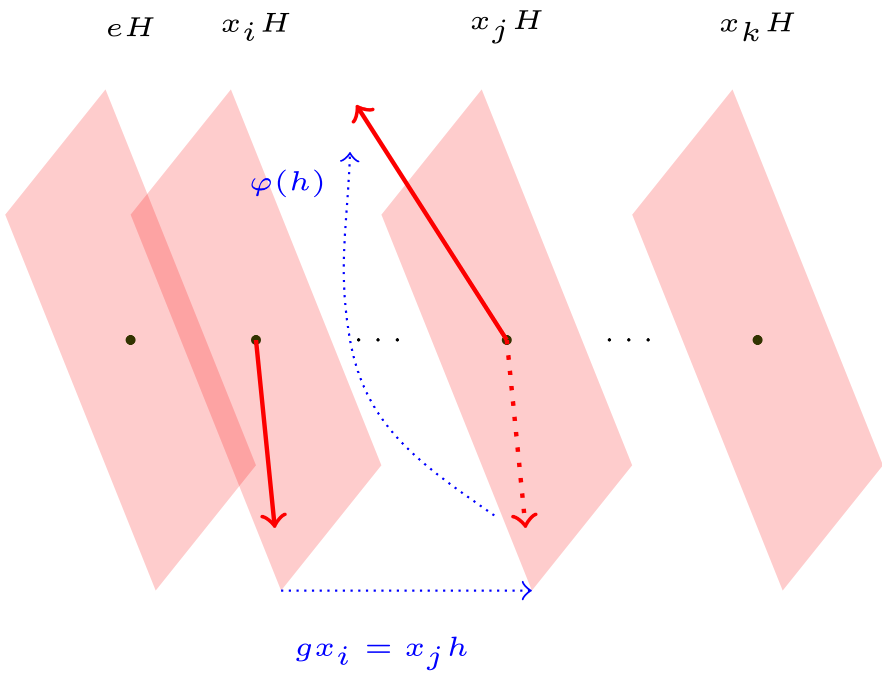


Opérations sur les représentations

$V \oplus W$

$\mathrm{Res}_H^G V$

$\mathrm{Ind}_H^G V$ pour $g \in G$ et $H \leq G$



Opérations sur les représentations

$V \oplus W$

$\mathrm{Res}_H^G V$

$\mathrm{Ind}_H^G V$

Avec les groupes symétriques

$$S_n \times S_m \leq S_{n+m}$$

Si on a V et W des représentations de S_n et S_m

$$\mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} V \otimes W$$

est une représentation de S_{n+m}.

Algèbre de Hopf

$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{Q}\{\text{Irréructibles de } S_n \text{ (à iso. près)}\}$

pour V_λ et V_μ des représentations irréductibles de S_n et S_m

$$V_\lambda * V_\mu = \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu V_\nu$$

H est une algèbre graduée

Algèbre de Hopf

$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{Q}\{\text{Irréructibles de } S_n \text{ (à iso. près)}\}$

pour V_λ et V_μ des représentations irréductibles de S_n et S_m

$$V_\lambda * V_\mu = \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu V_\nu$$

H est une algèbre graduée

pour V_ν une représentation irréductible de S_n

$$\Delta(V_\nu) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}_{S_k \times S_{n-k}}^{S_n} V_\nu = \bigoplus_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu}^\nu V_\lambda \otimes V_\mu$$

H est une bigèbre graduée, et donc une algèbre de Hopf.

Algèbre de Hopf

$H = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Q}\{\text{Irréructibles de } S_n \text{ (à iso. près)}\}$

$$V_\lambda * V_\mu = \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu V_\nu$$

$$\Delta(V_\nu) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}_{S_k \times S_{n-k}}^{S_n} V_\nu = \bigoplus_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu}^\nu V_\lambda \otimes V_\mu$$

$c_{\lambda,\mu}^\nu$ et $d_{\lambda,\mu}^\nu$ sont des entiers positifs COMBINATOIRE

$c_{\lambda,\mu}^\nu = d_{\lambda,\mu}^\nu$

$H \cong$ fonctions symétriques

...

Groupes $U_n(q)$

$U_n(q)$ Groupe (fini) des matrices triangulaires supérieures unipotentes sur un corps fini $\mathbf{F}_q$.

$U_6(2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Groupes $U_n(q)$

$U_n(q)$

$U_n(q) \times U_m(q) \leq U_{n+m}(q)$

$U_2(3) \times U_4(3) \leq U_6(3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{array}\right)$$

Groupes $U_n(q)$

$U_n(q)$

$U_n(q) \times U_m(q) \leq U_{n+m}(q)$ mais aussi $U_{n+m}(q) \twoheadrightarrow U_n(q) \times U_m(q)$

$U_6(3) \twoheadrightarrow U_2(3) \times U_4(3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{array}\right)$$

Groupes $U_n(q)$

$U_n(q)$

$U_n(q) \times U_m(q) \leq U_{n+m}(q)$ $\qquad$ $\pi \colon U_{n+m}(q) \twoheadrightarrow U_n(q) \times U_m(q)$

Ind et Res

Groupes $U_n(q)$

$U_n(q)$

$U_n(q) \times U_m(q) \leq U_{n+m}(q)$ $\pi\colon U_{n+m}(q) \twoheadrightarrow U_n(q) \times U_m(q)$

Ind et Res Inf

Pour $\pi\colon G \twoheadrightarrow H$ et une représentation $\varphi\colon H \to \mathrm{Gl(V)}$

On a $\pi \circ \varphi\colon G \to \mathrm{Gl(V)}$ donc $V = \mathrm{Inf}_H^G(V)$

Algèbre de Hopf pour $U_n(q)$ [q fixe, $n \geq 0$]

$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{Q}\{$Irréructibles de $U_n(q)$ (à iso. près)$\}$

pour V_λ et V_μ des représentations irréductibles de $U_n(q)$ et $U_m(q)$

$$V_\lambda * V_\mu = \mathrm{Inf}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu V_\nu$$

H est une algèbre graduée

Algèbre de Hopf pour $U_n(q)$ [q fixe, $n \geq 0$]

$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{Q}\{\text{Irréructibles de } U_n(q) \text{ (à iso. près)}\}$

pour V_λ et V_μ des représentations irréductibles de $U_n(q)$ et $U_m(q)$

$$V_\lambda * V_\mu = \mathrm{Inf}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu V_\nu$$

H est une algèbre graduée

pour V_ν une représentation irréductible de $U_n(q)$

$$\Delta(V_\nu) = \sum_{k=0}^n \mathrm{Res}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\nu = \bigoplus_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu}^\nu V_\lambda \otimes V_\mu$$

H est une bigèbre graduée, et donc une algèbre de Hopf.

Algèbre de Hopf pour $U_n(q)$ [q fixe, $n \geq 0$]

$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{Q}\{\text{Irréructibles de } U_n(q) \text{ (à iso. près)}\}$

$$V_\lambda * V_\mu = \mathrm{Inf}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu V_\nu$$

$$\Delta(V_\nu) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\nu = \bigoplus_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu}^\nu V_\lambda \otimes V_\mu$$

H est une bigèbre graduée, et donc une algèbre de Hopf.

$c_{\lambda,\mu}^\nu$ et $d_{\lambda,\mu}^\nu$ sont des entiers positifs

$c_{\lambda,\mu}^\nu \neq d_{\lambda,\mu}^\nu$

$H \cong$???

Algèbre de Hopf pour $U_n(q)$ [q fixe, $n \geq 0$]

$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{Q}\{$Irréructibles de $U_n(q)$ (à iso. près)$\}$

$$V_\lambda * V_\mu = \mathrm{Inf}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu V_\nu$$

$$\Delta(V_\nu) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\nu = \bigoplus_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu}^\nu V_\lambda \otimes V_\mu$$

H est une bigèbre graduée, et donc une algèbre de Hopf.

$c_{\lambda,\mu}^\nu$ et $d_{\lambda,\mu}^\nu$ sont des entiers positifs (COMBINATOIRE???)

$c_{\lambda,\mu}^\nu \neq d_{\lambda,\mu}^\nu$

$H \cong$ W I L D

Une théorie de super-représentation pour $U_n(q)$

Lumping W I L D conjugacy classes and irreductibles together to get a more tame theory André, Diaconis-Isaac.

Une théorie de super-représentation pour $U_n(q)$

Lumping W I L D conjugacy classes and irreductibles together to get a more tame theory André, Diaconis-Isaac.

Super-classes: regrouper ensemble les classes de conjugaison

$$A \cong B \quad \leftrightarrow \quad (A-I) = DM(B-I)N$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Une théorie de super-représentation pour $U_n(q)$

Lumping W I L D conjugacy classes and irreductibles together to get a more tame theory André, Diaconis-Isaac.

Super-classes: regrouper ensemble les classes de conjugaison

$$A \cong B \quad \leftrightarrow \quad (A-I) = DM(B-I)N$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

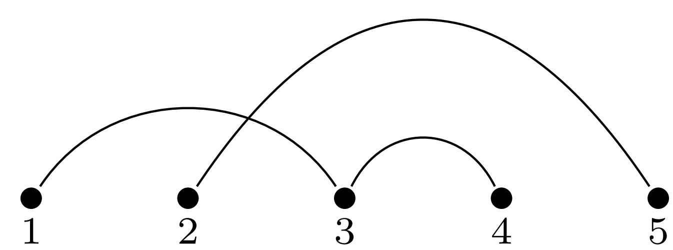
Une théorie de super-représentation pour $U_n(q)$

Lumping W I L D conjugacy classes and irreductibles together to get a more tame theory André, Diaconis-Isaac.

Super-classes: regrouper ensemble les classes de conjugaison

$$A \cong B \quad \leftrightarrow \quad (A - I) = DM(B - I)N$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow$$



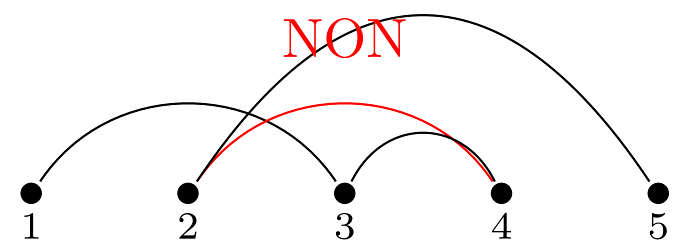
Une théorie de super-représentation pour $U_n(q)$

Lumping W I L D conjugacy classes and irreductibles together to get a more tame theory André, Diaconis-Isaac.

Super-classes: regrouper ensemble les classes de conjugaison

$$A \cong B \quad \leftrightarrow \quad (A - I) = DM(B - I)N$$

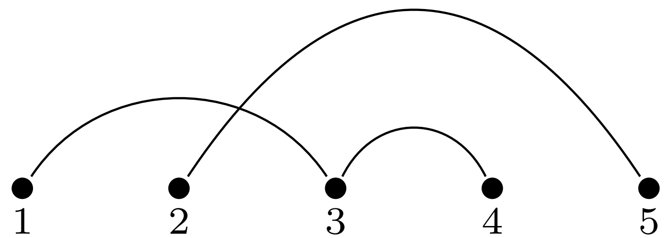
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$



Une théorie de super-représentation pour $U_n(q)$

Lumping W I L D conjugacy classes and irreductibles together to get a more tame theory André, Diaconis-Isaac.

Super-classes: regrouper ensemble les classes de conjugaison

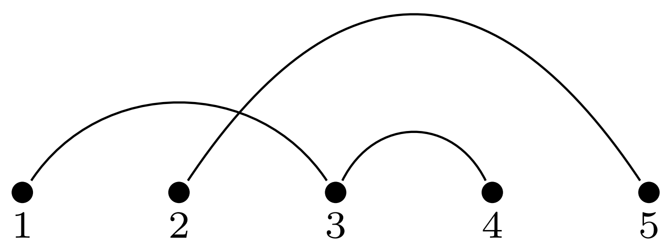


$$\leftrightarrow \quad \{\{1,3,4\},\{2,5\}\}$$

Une théorie de super-représentation pour $U_n(q)$

Lumping W I L D conjugacy classes and irreductibles together to get a more tame theory André, Diaconis-Isaac.

Super-classes: regrouper ensemble les classes de conjugaison



$\leftrightarrow \quad \{\{1,3,4\},\{2,5\}\}$

Super-indécomposable somme (pondérée) des irréductibles correspondant aux super-classes

Autre algèbre de Hopf pour $U_n(q)$

$\overline{H} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{Q}\{$Super-indécomposable de $U_n(q)$ (à iso. près)$\}$

$$V_\lambda * V_\mu = \mathrm{Inf}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_{\nu} c_{\lambda,\mu}^{\nu} V_\nu$$

$$\Delta(V_\nu) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}_{U_n(q)\times U_n(q)}^{U_{n+m}(q)} V_\nu = \bigoplus_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu}^{\nu} V_\lambda \otimes V_\mu$$

$\overline{H}$ est une bigèbre graduée, et donc une algèbre de Hopf. ($\overline{H} \subseteq H$)

$c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ et $d_{\lambda,\mu}^{\nu}$ sont des entiers positifs (COMBINATOIRE)

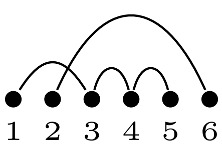
$c_{\lambda,\mu}^{\nu} \neq d_{\lambda,\mu}^{\nu}$

$H \cong$ fonctions symétriques en variables non-commutatives

Fonctions symétriques en variables non-commutatives

Fonctions monomiales m_λ (orbite d'un mot)

$$x_1x_2x_1x_1x_1x_2$$

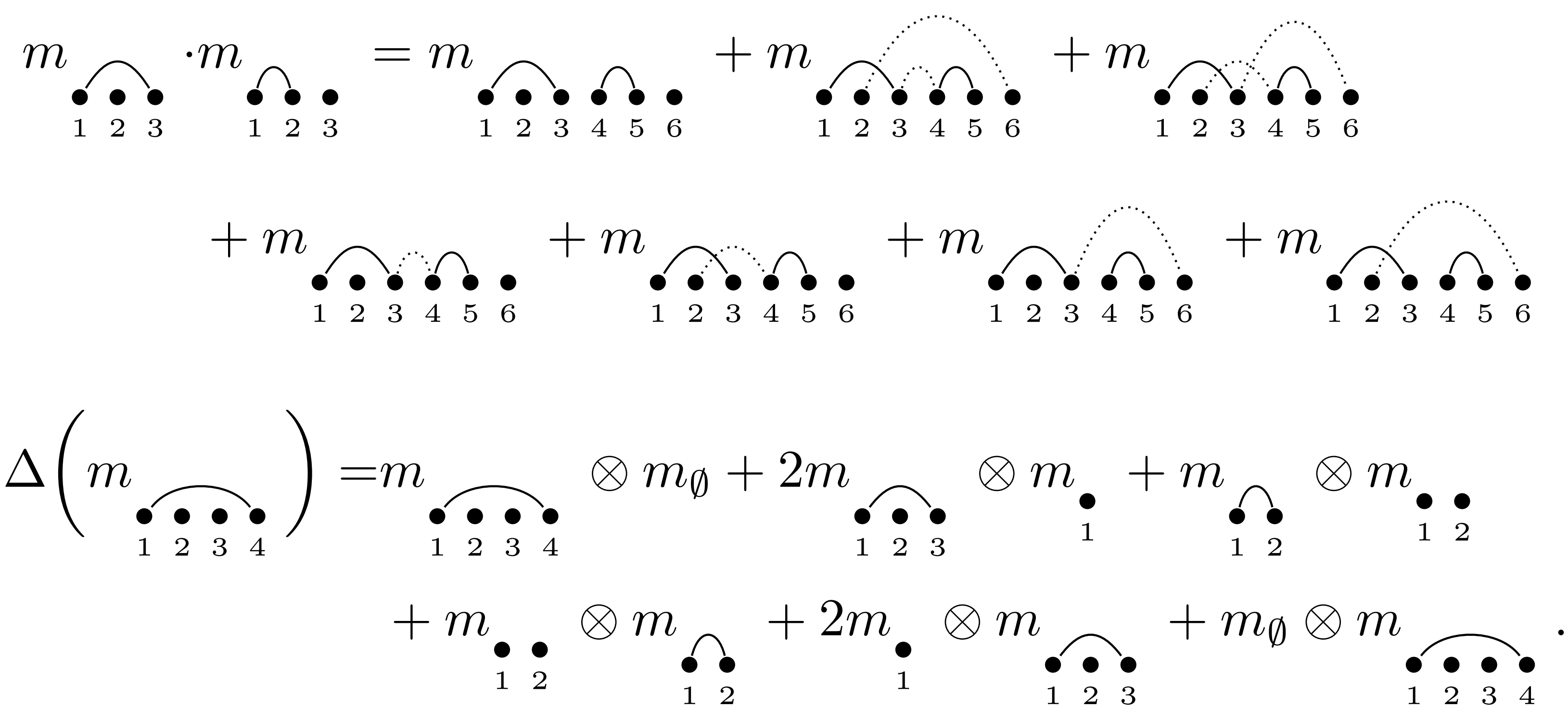
m 

$$= x_1x_2x_1x_1x_1x_2 + \cdots + x_ix_jx_ix_ix_ix_j + \cdots$$

Fonctions symétriques en variables non-commutatives

Fonctions monomiales m_λ (orbite d'un mot)

les λ sont des partitions d'ensembles



Au travail!

- Pour tout groupe, il existe une unique super-théorie maximale intégrale

- Pour obtenir des algèbres de Hopf, peut-on utiliser l'induction de Harish-Chandra sur d'autres familles de groupes G_n

$$\mathrm{Ind} \circ \mathrm{Inf} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} G_{n+m} & \twoheadrightarrow & H_{n,m} \\ & & \uparrow \\ & & G_n \times G_m \end{array}$$

$$\mathrm{Def} \circ \mathrm{Res}$$

Pour S_n: $S_{n+m} = H_{n,m}$; Pour $U_n(q)$: $H_{n,m} = U_n(q) \times U_m(q)$;
Pour $G_n = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$: $H_{n,m} = U_n(\mathbb{C})$

- Peut-on obtenir des algèbres de Hopf intéressantes?

M E R C I